МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

$X\circ A+YC-(Y+XB+YD+B)(Z+ZA+TC+C)^T+(X\circ A+YC)(ZB+T\circ D)^T+$

ОШСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. академика М.М.Адишева

$(ZB+T\circ D)^T=X+XA+A+YC-(Y+XB+YD+B)(Z^T+A^TZ^T+C^TT^T+C^T)+$

Сатаров Жоомарт

$(X+XA+A+YC)(B^TZ^T+T^T+D^TT^T+D^T)+B^TZ^T+T^T+D^TT^T+D^T=$

ОБРАЗУЮЩИЕ И СООТНОШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП НАД АССОЦИАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ БЕЗ ЕДИНИЦ

$(X-YZ^T+XT^T+T^T)+(A-BC^T+AD^T+D^T)+X(A-BC^T+AD^T+D^T)+$

$Y(C-DC^T+CD^T-C^T)+(A-BC^T+AD^T+D^T)T^T-(B+BA^T-AB^T-B^T)Z^T+$

$Y(C-DC^T+CD^T-C^T)T^T-Y(A-BC^T+AD^T-D^T)^TZ^T-$

$X(B+BA^T-AB^T-B^T)Z^T+X(A-BC^T+AD^T+D^T)T^T=0$

Ош-2022

Сатаров Жоомарт этот труд посвящает замечательным своим учителям: доктору физико-математических наук, профессору **Зенону Ивановичу Боревичу**; кандидату физико-математических наук, доценту **Жэудэту Сабиржановичу Мустафину**, а также кавалеру ордена Ленина, математику СЩ «Көк Жар» **Турабы Шамшиевичу Шамшиеву**.

Сатаров Жоомарт родился 1-января 1949 году в селе Кок-Жар Наукатского района Ошской области. Отец – Козуев Сатар долгое учительствовал, преподавая предмет истории, а мать Козуева Гулкан была колхозницей.

Окончив среднюю школу Кок-Жар серебряной медалью в 1967 году поступил на математическое отделение физико-математического факультета Ошского педагогического института. Окончил его в 1971 год с дипломом с отличием. Последние два курса в ОГПИ учился Ленинской стипендией. По окончании института был оставлен там преподавателем на физмате.

В 1971-72гг. служил в рядах Советской Армии. С 1972 по 1978 года работал преподавателем на кафедре алгебра и геометрии ОГПИ (ОшГУ).

1980-82гг. учился в очной аспирантуре Ленинградского государственного университета им. А.А.Жданова по специальности алгебра. Теоретическую подготовку проходил по кафедре высшей алгебра и теории чисел под руководством проф.Зенона Ивановича Боревича.

В 1983г. защитил кандидатскую диссертацию «Определяющие соотношения в унитарных группах» в город Ленинград. С 1983 года по переменно работал в Ошском государственном и Ошском технологическом университетах занимая должности доцента, заведующей кафедрой, профессора.

Без отрыва от производства подготовив, в 1998г. в Красноярском университета (РФ) защитил докторскую диссертацию «Образующие элементы и определяющие соотношения в линейных группах»

Выступил с докладами на ряде Всесоюзных и международных алгебраических конференций. Результаты исследований опубликовал в журналах «Известия вузов Математика», «Математические заметки», «Сибирской математической журнал», «Математической сборник». Сейчас работает профессором на кафедре «Прикладная математика» Ошского технологического университета.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

ОШСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. академика М.М. Адышева

Кафедра “Прикладная математика”

Сатаров Жоомарт

ОБРАЗУЮЩИЕ И СООТНОШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП НАД АССОЦИАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ БЕЗ ЕДИНИЦЫ

()

Ош-2019

УДК 512

ББК 22.143

С 21

Рекомендовано к печати ученым советом Ошского технологического университета имени академика М.М.Адышева

Ответ. редактор:

Рецензенты: д.ф.-м.н., проф. Каримов С.К.

д.ф.-м.н., проф. Аширбаева А.Ж.

Сатаров Жоомарт

С 21 Образующие и соотношения некоторых линейных групп над ассоциативными кольцами без единицы Ош: 2019 –103с.

ISBN 978-9967-461-92-5

В монографии найдены порождающие и соотношения симплектической группы над произвольным коммутативным полулокальным кольцом вообще говоря без 1, полной и полной элементарной линейных групп над произвольным (ненулевым) радикальным кольцом, а также проективных факторов всех названных групп. Такая же задача решается и для специальной линейной группы и ее надгрупп, содержащихся в полной линейной группе над произвольным полулокальным кольцом (где ни коммутативность, ни существование 1 не потребуются).

Для научных работников, преподавателей вузов, магистрантов, а также студентов математических специальностей с углубленной математической подготовкой.

С1602040000-19 УДК 512

ISBN 978-9967-461-92-5 ББК 22.143

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ……………………………………………………………………7
ГЛАВА I. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ НАД КОММУТАТИВНЫМ ПОЛУЛОКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ……………………………………………………………………13
§1. Обоснование изучаемого объекта ……………………………...13
§2. Образующие элементы группы $Sp^{\circ}(2n,R)$………………………...17
§3.Соотношения группы $Sp^{\circ}(2n,R)$…………………………………....20
§4. Производные разложения …………………………………………25
§5. Центральные леммы …………………………………………….....28
§6. Строчные трансформационные преобразования ……………..….31
§7. Стандартные формы в $Sp^{\circ}(2n,R)$……………………………......44
§8. Основной результат ……………………………………………......47
§9. Описание Дика проективного фактора $PSp^{\circ}(2n,R)$……………………49
ГЛАВА II. ОБРАЗУЮЩИЕ И СООТНОШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД ПОЛУЛОКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ……………………………………………………………………54
§1. Обозначения и соглашения …………………………………………55
§2. Квазиопределитель в $GL^{\circ}(n,\Lambda)$……………………………………..58
§3. Соотношения группы $SL^{\circ}(n,\Lambda)$………………………………......61
§4. Производные разложения……………………………………….....63
§5. Центральные леммы…………………………………………………65
§6. Строчная трансформация букв ……………………………………67
§7. Представимость в стандартном виде ………………………………68
§8. Представление группы $SL^{\circ}(n,\Lambda)$…………………………………...73
§9. Описания промежуточных подгрупп ………………………………76
ГЛАВА III. ДИКОВСКИЕ ОПИСАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП НАД РАДИКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ ……………………………..……79
§1. Образующие и соотношения обобщенной полной линейной группы над радикальным кольцом ………………………………………………......80
§2. Комбинаторное описание проективного фактора $PGL^{\circ}(n,R)$ …………85
§3. Определяющие соотношения полной элементарной линейной группы над радикальным кольцом ………………………………………………..87
§4. Диковское задание проективного фактора $PGE^{\circ}(n,R)$………...……...94

ЗАКЛЮЧЕНИЕ……………………………………………………………96
ЛИТЕРАТУРА ……………………………………………………………..98

Аннотация

В монографии методом трансформации найдены порождающие и соотношения следующих линейных групп: a) симплектической группы над произвольным коммутативным полулокальным кольцом (где существование 1 не обязательно); b) полной и полной элементарной линейных групп над произвольным (отличным от нуля) радикальным кольцом; c) проективных факторов всех групп из пп. a), b); d) специальной линейной группы над произвольным полулокальным кольцом (также не обязательно с 1, здесь квазиопределитель det° вводится предварительно и по образцу Дъёдонне); e) подгрупп полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих ее специальную часть.

Для научных работников, преподавателей ВУЗов, аспирантов, магистрантов, а также студентов математических специальностей ВУЗов с углубленным математическим обучением.

Введение

Один из главных вопросов в комбинаторной теории групп составляет задача описания групп через их образующие (порождающие) элементы и определяющие соотношения. В указанном направлении к настоящему времени накопилось большое количество книжных и журнальных материалов. Обстоятельная теория групп, представленных своими образующими и соотношениями, содержится в книгах [9] и [8]. Более поздние достижения в названном направлении теории групп приведены в книге [49]. Большой каталог групп (малых размерностей), представленных в виде порождающих и соотношений, содержится в [6].

Пусть G – группа, X – ее какая-нибудь порождающая система и W=0 – система определяющих соотношений группы G (т.е. ее полной набор соотношений, 0 – единичный элемент группы) в алфавите X. Указанием пары X, W=0 группа G определяется полностью и ее задание через эту пару в теории групп принято записывать как

$$G = < X \parallel W = 0 > \qquad (< \parallel >)$$

или проще, даже, как $G = < X \parallel W >$. Примеры групп, представленных в виде $(< \parallel >)$ появлялись позднее также в работах Магнуса, Дика, Гроссмана и др. Таким образом, отдельные группы, возникая в таком (абстрактном) виде самым естественным образом, требовали дальнейшего своего изучения именно в указанной форме. Задание группы в виде (<||>), вопреки внешней своей простоте, является особым способом ее представления − по нему, как правило, очень трудно извлечь какие-нибудь информации о строении самой группы. Раздел теории групп, изучающий группы, представленных в виде (<||>), а также с позиции отдельных комбинаторных рассуждений, носит название комбинаторной теории групп. В комбинаторной теории групп вместо слова "задание" (группы в виде (<||>)) используют также равносильные ему термины "комбинаторное представление", "описание Дика" и, допуская вольность речи, даже термин "генетический код".

В настоящее время теория групп, представленных в виде (<||>), составляет большое и самостоятельное направление в общей теории со своими объектами исследования и методами изучения. Отметим, что для каждой (формальной) пары X,W всегда существует, причем единственная группа G с этими комбинаторными компонентами $G = < X \parallel W >$. Группа G может допускать множество описаний в виде $(< \parallel >)$ и, поэтому эффективность (полезность) каждого такого представления может быть определена задачей, где она будет применяться.

Пусть G – абстрактная группа и X – какая-нибудь ее порождающая система. Пусть далее, V означает некоторую (непустую) систему слов в алфавите X. Естественным является вопрос: образует ли V полную для G систему слов (относительно X)? Если подходить к этому вопросу с позиции эффективности, то его можно поставить более общо: каков критерий того, чтобы V образовала полный для G набор слов в алфавите X? Этот вопрос разными авторами решался по-разному – одни подгоняли его под определение описания, а другие применяли некоторые соображения специфического характера и т.д. В этой же монографии вопрос полноты для V нами решается в следующем общем виде. А именно, пусть для каждого элемента g из G указана совокупность слов $\{s(g)\}$ алфавита X, записывающих этот элемент (эти совокупности могут быть и бесконечными). Выбранные слова $s(g)$ условно будем называть *стандартными формами* элементов группы G (они в конктретных ситуациях действительно обретут смысл стандартности). При принятых обозначениях относительно полноты системы соотношений имеет место следующий общий

Критерий. *Совокупность $V=0$ образует для G полную систему соотношений тогда и только тогда, когда любое слово v соотношениями из $V=0$ можно привести к какому-либо (любому!) из стандартных видов $s(v)$ и вывести из $V=0$ все соотношения вида $s(0)=0$.*

Сформулированный критерий нами будет и положен в основу основного метода монографии – метода трансформации букв. Его доказательство в полном объеме приведено в [17].

Одно из центральных мест в комбинаторной теории групп, как и в общей теории, составляет вопрос об описании в виде ($<\|>$) линейных групп (над различными классами ассоциативных колец). Нашей целью в настоящей монографии является выявление генетического кода следующих линейных групп:

1. Полной симплектической группы $Sp^{\circ}(2n,R),\ n\geq 2,$ над произвольным коммутативным полулокальным кольцом R, где существование 1 в R не обязательно;

2. Специальной линейной группы $SL^{\circ}(n,\Lambda), n\geq 2,$ над (уже произвольным полулокальным кольцом Λ, также вообще говоря не обладающим единицей 1. Здесь выделяющий эту группу (из $GL^{\circ}(n,\Lambda)$) квазиопределитель det° строится предварительно и он обобщает известного определителя Дъёдонне с большим перекрытием;

3. Полной и полной элементарной линейных групп $GL^{\circ}(n,\Lambda)$ и $GE(n,R)$ степеней n>2 над произвольным радикальным кольцом R={0}.

В задачах 1, 3 предварительно вычислив центры C и порождающие этих центров, мы находим также диковские описания названных там групп. Для задачи же 2 описание проективного фактора без существенных изменений повторяет рассуждения из задачи 1 (т.е. новых идей нам не добавляет). Поэтому опуская это рассмотрение, здесь мы решаем вопрос о при выявлении диковского представления всех промежуточных подгрупп H, для которых $SL^{\circ}(n,\Lambda) < H < GL^{\circ}(n,\Lambda)$. Аналогичное (серийное) описание практиковалось автором и в более ранней работе [19].

Чтобы определить место решаемых здесь вопросов среди имеющихся на сегодня результатов, нам необходимо совершить небольшой экскурс по названному направлению.

Исторический обзор по линейным группам

В указанном направлении (опуская групп малых размерностей) наиболее общими можно считать следующие результаты. Напомним прежде всего классическую работу В. Магнуса [54], где им был найден генетический код специальной линейной группы $SL(n,\ Z), n \geq 3$ (относительно элементарных трансвекций $t_{ij}(1)$). Обратившись к этому же объекту исследования $SL(n,\ Z),\ n \geq 3$, Б. Нойман и Х. Нойман в [55] находили более простое его комбинаторное описание. Над этим же кольцом Z Янь Ши-цзянь в своей (большой) работе [50] с позиции образующих и соотношений изучал не только линейные группы $GL(n,\ Z)$, $SL(n,\ Z)$, но и их проективные факторы $PGL(n, Z), PSL(n,\ Z)$. Далее, С. Грин рассматривая в работе [53] специальную линейную группу $SL(n,\ T)$, $n \geq 3$, над произвольным телом T (определитель понимается в смысле Дьёдонне), находил там ее генетическое представление относительно элементарных диагональных матриц и трансвекций. В работе же [48] Р. Стейнберг серийно сводя к минимуму системы соотношений, показал, что специальная линейная группа $SL(n,\ F_q),\ n \geq 3$, над произвольным конечным полем F_q может быть задана одними “стейнберговскими” соотношениями между элементарными трансвекциями. Исследование Г. Носкова [11] относится уже к подгруппам полной линейной группы, близким к ортогональным. А точнее, в названной работе им было найдено диковское описание симплектической группы $Sp(2n,\ R)$ над локальным кольцом R (с 1), в котором каждый конечно порожденный правый идеал – главный. И в заключение, отметим работу Н.С. Романовского [12], где он находил представляющую $GL(n,\ R),\ n \geq 2$, систему соотношений (относительно содержащихся там элементарных матриц) над произвольным локальным кольцом R.

К этому списку можно присоединять и следующие (также общие и написанные в разные годы) исследования автора: [13] − [35]. Следует отметить, что во всех (перечисленных выше) работах, за исключением [20] − [23], исследованные там линейные группы были рассмотрены над какими-то ассоциативными кольцами с 1. А что касается объектов изучения в [20] − [23], они представляли собой лишь обобщенную форму некоторых линейных групп над кольцами с 1 (т.е. являлись “почти линейными” группами над кольцами с 1). В сокращенных (т.е. тезисных) же публикациях автора [39] − [47] анонсировались аналогичные вопросы для некоторых линейных или “почти линейных” групп над отдельными классами ассоциативных колец с 1.

Начиная с 1998 года (см., например, [18]) автором этой монографии были начаты исследования по выявлению комбинаторного описания отдельных линейных групп, определенных ассоциативными, но уже вообще говоря без 1, основными кольцами. Как (и насколько) будет расширяться класс линейных групп при переходе от их основного кольца с 1 к такому же кольцу без 1, в [18] (и подробно в [17]) методом прямых сумм было показано обстоятельным образом. К настоящему времени накопилось уже определенное количество исследований, относящихся к вопросу выявления диковского строения отдельных линейных групп, заданных над, уже вообще говоря без 1, основными кольцами. В качестве подтверждения к сказанному, здесь мы можем называть работы [13] − [16] и [36] − [38].

При переходе от случая основных колец с 1 к таким же кольцам вообще говоря без 1 нам необходимо перейти от обычного матричного умножения к матричному квазиумножению. Поэтому при выявлении диковского описания обобщенных линейных групп хотя план и ход решения остаются прежними, их воплощение технически будет возростать неимоверно – здесь уже требуются тонкие (и умелые) маневрирования при преобразованиях. Примечательным в наших исследованиях является нетрадиционный случай, когда основное кольцо R не содержит 1 (так будет, например, при всех радикальных $R\neq\{0\}$). В таких случаях рассмотрение над ними обычных полных линейных групп (и каких-то их подгрупп) лишается смысла просто-попросту, и, поэтому, говорить о таких группах над R можно только переходя к их обобщенных формам.

Итак, как мы уже убедились, снятие приставки "с 1" в основном кольце линейной группы приводит нас к существенно новому объекту. Это говорит и о том, что решая и другие задачи теории линейных групп, где умалчивается существование 1 в их основном кольце, мы существенно продвинули эти задачи к новым рубежам в указанном направлении.

Структурный обзор монографии

Монография состоит из оглавления, введения, трех глав, содержащих в себе 21 параграфов, заключения и списка литературы. Для удобства и во избежание путаницы, в каждой главе принята автономная система нумераций параграфов и формул.

Глава I (§§1 – 9) посвящена к выявлению образующих и соотношений обобщенной симплектической группы $Sp^{\circ}(2n,\ R)$ и ее проективного фактора $PSp^{\circ}(2n,\ R)$ $(n \geq 2)$ над произвольным коммутативным полулокальным кольцом R (где существование 1 не обязательно). В §1 введено понятие обобщенной симплектической группы $Sp^{\circ}(2n,\ R)$ для любого (ассоциативно-) коммутативного кольца R и показано, что в случае наличия 1 в R эта группа (абстрактно) совпадает с обычной симплектической группой $Sp\ (2n,\ R)$. Здесь для представления группы $Sp^{\circ}(2n,\ R)$ взята порождающая система (2) (она составлена из внутренних квазитрансвекций и элементарных диагональных симплектических матриц). Для представления группы $Sp^{\circ}(2n,\ R)$, как было отмечено выше, применен метод трансформации букв. В §9 вычисляется центр $C = cent\, Sp^{\circ}(2n,\ R)$ изучаемой группы и находится естественная его порождающая система слов (в алфавите (2)). Далее присоединением к найденной для $Sp^{\circ}(2n,\ R)$ полной системе соотношений $1-12$ центральных соотношений $13-15$, мы приходим к описывающему проективного фактора $PSp^{\circ}(2n,\ R)$, $n \geq 2$, набору соотношений $1-15$.

В наборах 1 – 8 главы II найдено представление обобщенной специальной линейной группы $SL^{\circ}(n,\ R)$, $n \geq 2$, над произвольным полулокальным кольцом R. Здесь выделяющий подгруппу $SL^{\circ}(n,\ R)$ из $GL^{\circ}(n,\ R)$ квазиопределитель построен в §2 и, как показано там, он с большим перекрытием квазиобобщает известного определителя Дьёдонне над телом. Как в главе I, для группы $SL^{\circ}(n,\ R)$ находятся серии соотношений $1-16$ и тем же методом трансформации показывается полнота этих серий в выбранном алфавите (8). Далее, в §9 единообразным охватом дается комбинаторное описание всех промежуточных подгрупп H,

$SL^{\circ}(n,R) \le H \le GL^{\circ}(n,R)$. Группа H являясь близкой к $SL^{\circ}(n, R)$ (т.е. отличаясь от $SL^{\circ}(n, R)$ лишь диагональными образующими), допускает такой же генетический код $1-16$, только с другой областью действия нетрансвекционных соотношений $1-9$.

Глава же III (§§1 – 4) условно разбита на две части. Здесь в §1 найдены определяющие соотношения $1-9$ полной линейной группы $GL^{\circ}(n, R)$, $n \ge 2$, над произвольным ненулевым радикальным кольцом R. Полнота набора $1-9$ (относительно алфавита (1)) и здесь показана методом трансформации. Вычисление центра C группы $GL^{\circ}(n, R)$ (см. §2) здесь дает нам еще три серии соотношений $10-12$ в тех же образующих (1). Присоединяя эти соотношения к найденным сериям $1-9$, мы тем самым приходим к определяющей фактора $PGL^{\circ}(n, R)$, системе соотношений $1-12$.

Вторая же часть главы посвящена к нахождению диковского описания полной элементарной группы $GE^{\circ}(n, R)$ и ее проективного фактора $PGE^{\circ}(n, R)$ над тем же радикальным кольцом R. Здесь как сама $GE^{\circ}(n, R)$, так и ее фактор $PGE^{\circ}(n, R)$ представлены относительно порождающей $GE^{\circ}(n, R)$ системы элементарных матриц (2). Решение этой задачи проводится с определенными расхождениями как в случае группы $GL^{\circ}(n, R)$.

В заключительной части монографии подытоживается вся проделанная работа.

В части же литература приведен список так или иначе связанных с проведенными здесь исследованиями книг и научных статей.

ГЛАВА I. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУППЫ НАД КОММУТАТИВНЫМ ПОЛУЛОКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ

По вопросу описания симплектических групп наиболее общим можно считать результат [11], где были найдены порождающие и соотношения обычной симплектической группы $Sp(2n,R),\ n\geq 2,$ над локальным кольцом R с 1, подчиненным некоторым естественным условиям. Нашей основной целью в этой главе является выявление образующих элементов и определяющих соотношений обобщенной симплектической группы $Sp^{\circ}(2n,R),\ n\geq 2,$ над произвольным коммутативным и не обязательно с 1 полулокальным кольцом R. Как мы увидим далее, в случае наличия 1 в R рассматриваемая здесь группа $Sp^{\circ}(2n,R)$ (абстрактно) превращается в обычную симплектическую группу $Sp(2n,R)$.

При представлении группы $Sp^{\circ}(2n,R),\ n\geq 2,$ мы применяем метод трансформации, развитый в [13] – [17] и других работах автора. В отличие от классических случаев, здесь в качестве образующих будут взяты “внутренние” диагональные и трансвекционные матрицы из $Sp^{\circ}(2n,R)$.

§1. Обоснование изучаемого объекта

Группа $Sp^{\circ}(2n,R)$ вводится следующим образом. Пусть Λ – произвольное ассоциативное кольцо и $\circ$ – его квазиумножение, т.е. $x\circ y = x + xy + y$.
Элемент $\alpha\in\Lambda$ называется квазиобратимым, если $\alpha\circ\beta = 0 = \beta\circ\alpha$ при некотором β из Λ. По квазиобратимому $\alpha\in\Lambda$ его квазиобратное $\beta=\alpha'$ всегда определяется однозначно. Совокупность всех квазиобратимых элементов Λ° кольца Λ образует группу относительно композиции $\circ$ (где единицей будет нуль). В случае, когда $\Lambda = M(2n,R)$ – полное матричное кольцо (основное кольцо ассоциативно), группу квазиобратимых матриц из $M(2n,R)$ обозначим как $GL^{\circ}(2n,R)$ и назовем ее обобщенной полной линейной группой над R степени $2n$. Ниже ^{T}, как всегда, будет обозначать транспонирование матриц.

Пусть теперь R – произвольное (ассоциативно-)коммутативное кольцо, для которого существование 1 не обязательно. Обозначим через $Sp^{\circ}(2n,R)$ множество матриц $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ из $M(2n,R)$, разбитых на клетки порядка n и удовлетворяющих условиям

$$X - YZ^T + XT^T + T^T = Y + YX^T - XY^T - Y^T = Z - TZ^T + ZT^T - Z^T = 0. \quad (Sp^{\circ})$$

Покажем, что $Sp^{\circ}(2n,R)$ образует группу относительно матричного квазиум ножения. Пусть $a = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ – произвольная матрица из $Sp^{\circ}(2n,R)$. Составленная по ней матрица $b = \begin{pmatrix} T^T & -Y^T \\ -Z^T & X^T \end{pmatrix}$ удовлетворяет равенству $a \circ b = 0$. В [15] над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом был введен квази-определитель det° (любого порядка) и там же показана его полная мультипликативность. Применяя к последнему равенству квазиопределитель det° порядка $2n$, будем иметь

$$det^{\circ} a \circ det^{\circ} b = det^{\circ}(a \circ b) = det^{\circ} 0 = 0,$$

т.е. имеем $det^{\circ} a \in R^{\circ}$. Но, как доказано (см. [17, с. 177]), так может быть (в том и) только в том случае, когда $a \in GL^{\circ}(2n,R)$. Последнее в свою очередь приводит нас к

$$a' = a' \circ 0 = a' \circ (a \circ b) = (a' \circ a) \circ b = 0 \circ b = b.$$

Теперь равенство $b \circ a = 0$ влечет за собой клеточные соотношения

$$X - Y^T Z + T^T X + T^T = Y + T^T Y - Y^T T - Y^T = Z - Z^T X + X^T Z - Z^T = 0. \quad (Sp^{\circ} \rightarrow)$$

Полученные следствия $(Sp^{\circ} \rightarrow)$ показывают, что $b \in Sp^{\circ}(2n,R)$. Итак, установлено, что $Sp^{\circ}(2n,R)$ состоит только из квазиобратимых матриц и оно наряду с каждым своим элементом a содержит также квазиобратное ему a'.

Возьмем теперь произвольным образом матрицу $c = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp^{\circ}(2n,R)$ (и здесь клетки имеют порядок n). Покажем, что квазипроизведение $a \circ c =$

$\begin{pmatrix} X\circ A+YC & Y+XB+YD+B \\ Z+ZA+TC+C & ZB+T\circ D \end{pmatrix}$ также удовлетворяет условиям (Sp°). Действительно, для последнего правильность первого равенства (Sp°) видна из

$$\begin{aligned}
&X\circ A+YC-(Y+XB+YD+B)(Z+ZA+TC+C)^T+(X\circ A+YC)(ZB+T\circ D)^T+\\
&(ZB+T\circ D)^T=X+XA+A+YC-(Y+XB+YD+B)(Z^T+A^TZ^T+C^TT^T+C^T)+\\
&(X+XA+A+YC)(B^TZ^T+T^T+D^TT^T+D^T)+B^TZ^T+T^T+D^TT^T+D^T=\\
&(X-YZ^T+XT^T+T^T)+(A-BC^T+AD^T+D^T)+X(A-BC^T+AD^T+D^T)+\\
&Y(C-DC^T+CD^T-C^T)+(A-BC^T+AD^T+D^T)T^T-(B+BA^T-AB^T-B^T)Z^T+\\
&Y(C-DC^T+CD^T-C^T)T^T-Y(A-BC^T+AD^T+D^T)^TZ^T-X(B+BA^T-AB^T-B^T)Z^T+\\
&X(A-BC^T+AD^T+D^T)T^T=0
\end{aligned}$$

(в последнем члене все скобочные суммы – нулевые, ибо a, c удовлетворяют требованиям (Sp°)). Остальные равенства из (Sp°) для $a\circ c$ проверяются совершенно аналогично. А это означает, что $Sp^\circ(2n,R)$ образует также систему относительно матричного квазиумножения. Приведенные факты вместе показывают, что $Sp^\circ(2n,R)$ образует подгруппу в $GL^\circ(2n,R)$. Группу $Sp^\circ(2n,R)$ мы и назовем *обобщенной симплектической группой* степени $2n$ над кольцом R.

Вернемся на короткое время к случаю, когда кольцо R обладает 1. Обозначим через e и E единичные матрицы из $M(n,R)$ и $M(2n,R)$ соответственно. Пусть $I=\begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix}$ – форма порядка $2n$ и пусть $Sp(2n,R)=$ $\{x\in GL(2n,R): xIx^T=I\}$– классическая симплектическая группа над R степени $2n$. При принятых обозначениях имеют место легко проверяемые эквиваленции

$$a\in Sp^\circ(2n,R)\leftrightarrow(Sp^\circ)\leftrightarrow(E+a)I(E+a)^T=I\leftrightarrow E+a\in Sp(2n,R). \qquad (\leftrightarrow)$$

Теперь из равенства $E+x\circ y=(E+x)(E+y)$ (x,y – любые матрицы из $M(2n,R)$) и эквиваленций ($\leftrightarrow$) очень просто усматривается изоморфность отображения

$$Sp^\circ(2n,R)\to Sp(2n,R),\ a\to E+a.$$

А это говорит о том, что введенная $Sp^{\circ}(2n,R)$ в случае R с 1 совпадает с обычной симплектической группой $Sp(2n,R)$.

Очевидными примерами полулокальных колец без 1 могут послужить прямые суммы любых полулокальных и ненулевых радикальных колец (ассоциативное кольцо называется *радикальным,* если оно совпадает со своим радикалом Джекобсона). То, что полулокальные (не обязательно с 1) кольца образуют несметно большой класс по отношению к их подклассу таких колец с 1, методом прямых сумм может быть показано как в [17] для случая локальных R.

Начиная отсюда всюду R считается произвольным коммутативным полулокальным кольцом не обязательно с 1 и $J = J(R)$ радикалом Джекобсона этого кольца. Нашим главным объектом исследования в этой главе является обобщенная симплектическая группа $Sp^{\circ}(2n,R),\ n \geq 2,$ над этим кольцом R.

§2. Образующие элементы группы $Sp^{\circ}(2n,R)$

По определению для кольца R мы имеем $R/J \cong k_1 \oplus ... \oplus k_m$, где k_i – некоторые поля ($i = 1, ..., m,\ \ m \geq 1$). Обозначим через R_i полный прообраз слагаемого k_i при естественном эпиморфизме

$$R \to \overline{R} = R/J, \quad x \to \bar{x} = x + J. \qquad (\,\bar{}\,)$$

Эти R_i образуют локальные подкольца в R и имеют (общие с R) радикалы J. Для кольца R очевидно разложение

$$R = R_1 + ... + R_m. \qquad (+)$$

Далее будут действовать следующие обозначения: для натурального k $I(k) = \{1,2,...,k\}$ и $r(k)$ – наименьший положительный вычет числа k по модулю m; для номеров $i \in I(2mn)$ $R_i = R_{r(i)}$; для $i \in I(mn)$ e_i – некоторый (не важно какой) прообраз единицы $1_i \in k_i$ при эпиморфизме $(\,\bar{}\,)$ и для любого $k \in I(2mn)$ $e_k = e_{r(k)}$; если иное не оговорено, то $\equiv$ – сравнение в R по модулю J; если $k \in I(2mn)$, то $k^* = k + mn$ при $k \leq mn$ и $k^* = k - mn$ при $k > mn$; $A = \{<i, j> \in I(2mn) \times I(2mn) : i \equiv j (mod\, m) \,\&\, i \neq j\}$; для номеров $i \in I(mn)$

$P_i = \{ j \in I(2mn):\ < i,\ j > \in A \& (i < j \le mn \vee j \ge i^*)\},\ \ Q_i = \{ j \in I(2mn) :< i, j > \in A \&$ $(i \ne j \le mn \vee j \ge i^*)\};$ для пары $< i, j > \in A$ ε_{ij} – оператор, действующий на R (слева) как: $j = i^* \to \varepsilon_{ij}\alpha = 0,\ \ j \ne i^* \& (i \le mn < j \vee j \le mn < i) \to \varepsilon_{ij}\alpha = \alpha,\ \ (i, j \le mn \vee$ $i, j > mn) \to \varepsilon_{ij}\alpha = -\alpha;$ и, наконец, для номеров $i, j \in I(2mn)$ и элемента $\alpha \in R_i$ $(\alpha)_{ij}$ – матрица порядка $2mn,$ где на позиции $< i, j >$ стоит элемент α и все прочие позиции заполнены нулями.

Как показывает (+), элементы из $M(2n, R)$ наряду с обычными допускают также "развернутые матричные" представления

$$a = (\tilde{a}_{ij})_{1 \le i, j \le 2mn},\ i \equiv j (mod\ m), \tag{1}$$

где $\tilde{a}_{ij} \in R_i$. Представление в виде (1) вообще говоря не однозначно (оно однозначно в том и только том случае, когда $m = 1$ или $J = \{0\}$). В наших рассуждениях как обычные, так и развернутые представления (1) матриц из $Sp^\circ(2n,R)$ одинаково будут использованы.

Для введенных выше локальных слагаемых R_i имеют место дизъюнктные разложения

$$R_i = (-\bar{e}_i) \cup R_i^\circ,\ \ i = 1, \dots, m \tag{$\cup$}$$

(доказательство этого факта для любого локального кольца содержится в [17, с. 15]). Далее, элементы из J будем называть *радикальными* элементами.

Пользуясь образующими обычной симплектической группы $Sp(2n,R),$ приведенными в [3] и [4] (для случая коммутативного полулокального R с 1), составим следующие (симплектически элементарные) матрицы:

$d_k(\varepsilon) = (\varepsilon)_{kk} + (\varepsilon')_{k^*k^*},\ \varepsilon \in R_k^\circ,\ \ k \in I(2mn),\ \ t_{ij}(\alpha) = (\alpha)_{ij} + (\varepsilon_{ij}\alpha)_{j^*i^*},\ \alpha \in R_i, < i, j > \in A.$

Для последних матриц верна формула $t_{ij}(\alpha) = t_{j^*i^*}(\varepsilon_{ij}\ \alpha)$ при всех $< i, j > \in A,$ $j \ne i^*$. Покажем, что матрицы $d_k(\varepsilon), t_{ij}(\alpha)$ входят в $Sp^\circ(2n,R)$ (они и будут составлять там "внутренние" образующие). Действительно, возьмем произвольно матрицу $X \in GL^\circ(n,R)$ и симметрическую матрицу Y из $M(n,R).$ Как легко проверить, составленные по ним (клеточные) матрицы

$$a=\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & (X')^T \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix}$$

удовлетворяют условиям (Sp°), и, поэтому, являются некоторыми элементами из $Sp^{\circ}(2n,R)$. Включения $d_k(\varepsilon), t_{ij}(\alpha)\in Sp^{\circ}(2n,R)$ теперь очень просто следуют из того, что матрицы $t_{ij}(\alpha)$ при $i,j\le mn$ или $i,j>mn$ и $d_k(\varepsilon)$ имеют вид a, и $t_{ij}(\alpha)$ же в прочих случаях – либо вид b, либо же вид c. Для квазиобратных этих симплектических матриц имеют место формулы $d'_k(\varepsilon)=d_k(\varepsilon')$, $t'_{ij}(\alpha)=t_{ij}(-\alpha)$.

Введем к рассмотрению еще один тип матриц из $Sp^{\circ}(2n,R)$ специального вида. А именно, ниже под записью (is), где $i\in I(mn)$, $s\in P_i$, мы условимся понимать некоторые слова вида $t_{is}(\chi)\circ t_{si}(\pi)$,где аргументы χ,π связаны соотношением $\chi\pi\equiv -e_i$. “Внутренние” матрицы (is) в наших рассуждениях будут играть роль обычных матриц-транспозиций. Их мы для равных индексов доопределяем как $(ii)=0$.

Наши дальнейшие рассуждения используют следующую лемму.

Лемма 1. *Если в неразвернутой матрице $a=(a_{pq})_{1\le p,q\le 2n}$ из $Sp^{\circ}(2n,R)$ i-я строка равна нулю, $i\le n$, то равен нулю и ее $(i+n)$-й столбец. Аналогичным образом, из того, что в a равен нулю i-й столбец, следует равенство нулю ее $(i+n)$-ой строки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ – разбиение матрицы a на клетки порядка n. Тогда, как показывают соотношения $Y+YX^T-XY^T=Y^T$, $X-YZ^T+XT^T=-T^T$ (они содержатся среди (Sp°)), матрицы Y^T и T^T имеют i-ые нулевые строки. А это означает, что i-ые столбцы в Y,T также будут нулевыми, т.е. первое утверждение леммы действительно имеет место. А что касается второго утверждения, то оно совершенно аналогично извлекается из первого и третьего равенств ($Sp^{\circ}\to$). Лемма 1 доказана.

Покажем теперь, что группа $Sp^{\circ}(2n,R)$ порождается матрицами

$$t_{ij}(\alpha), \alpha \in R_i, <i,j> \in A; \;\; d_k(\varepsilon), \; \varepsilon \in R_k^\circ, \; k \in I(2mn). \qquad (2)$$

Пусть $a = (\widetilde{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ – произвольная матрица из $Sp^\circ(2n,R)$, представленная в развернутом виде (1). Она на конечное число матриц из (2) расщепляется следующим образом. Первый шаг расщепления состоит из квазиумножения a справа на некоторую матрицу вида $(1s)', s \in P_1 \cup \{1\}$. Если $\widetilde{a}_{11} \in R_1^\circ$, то мы положим $s = 1$, т.е. в этом случае никакое расщепление не потребуется.

Пусть в a $\widetilde{a}_{11} \notin R_1^\circ$. Согласно разложению ($\cup$) так может быть только тогда, когда $\widetilde{a}_{11} \equiv -e_1$. Здесь сравнение позиций $<1,1>$ в

$$X - YZ^T + XT^T + T^T = 0 \qquad (3)$$

дает нам

$$\widetilde{a}_{11} \circ \widetilde{a}_{1+mn,\,1+mn} - \sum_{0 \le k < n} \widetilde{a}_{1,\,1+(n+k)m} \widetilde{a}_{1+mn,\,1+km} + \sum_{1 \le k < n} \widetilde{a}_{1,\,1+km} \widetilde{a}_{1+mn,\,1+(n+k)m} \equiv 0,$$

т.е. будем иметь

$$\sum_{1 \le k < n} \widetilde{a}_{1,\,1+km} \widetilde{a}_{1+mn,\,1+(n+k)m} - \sum_{0 \le k < n} \widetilde{a}_{1,\,1+(n+k)m} \widetilde{a}_{1+mn,\,1+km} \equiv e_1.$$

Но последнее, как легко видеть, возможно только тогда, когда найдется номер $s \in I(2n-1)$, для которого $\widetilde{a}_{1,\,1+sm} \not\equiv 0$. Квазиумножая a справа на $(1s)'$, здесь мы получаем (развернутую) матрицу, где на позиции $<1,1>$ стоит элемент $\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{1s}\pi \not\equiv -e_1$ (для простоты изложения, далее, матрицу, полученную после каждого шага отщепления будем обозначать той же буквой $a = (\widetilde{a}_{ij})$). Согласно разложению ($\cup$) этот элемент $\widetilde{a}_{11}$ уже будет квазиобратимым. (Легко проверить, что произведенная операция позицию $<1,s>$ в a заменяет на некоторый радикальный элемент.)

Чуть отвлекаясь в сторону, мы для номера $k \in I(n)$ и матрицы a из $M(2n, R)$ условимся писать $a(k)$, если в этой матрице равны нулю все строки и столбцы с номерами из $\{1, ..., k\} \cup \{1+n, ..., k+n\}$. Следующий этап расщепления составляют последовательные квазиумножения a справа на матрицы

$d_1(\tilde{a}'_{11})$, $\prod\limits_{1^*\neq q\in P_1} t_{1q}(-\tilde{a}_{1q})$ и $t_{11^*}(-\tilde{a}_{11^*})$. Эта операция аннулирует всю первую строку в a. Квазиумножения теперь полученной матрицы слева последовательно на $\prod\limits_{1^*\neq q\in P_1} t_{q1}(-\tilde{a}_{q1})$ и $t_{1^*1}(-\tilde{a}_{1^*1})$ приведут ее к клеточно-диагональному виду $a=$ $diag(0,\tilde{a}^1)$, где $\tilde{a}^1$ – некоторая матрица порядка $2mn-1$. Повторяя описанную процедуру при помощи того же равенства (3) и матриц

$$(2s)',\ s\in P_2\cup\{2\},\ d_2(\tilde{a}'_{22}),\quad \prod_{2^*\neq q\in P_2} t_{2q}(-\tilde{a}_{2q}),\ t_{22^*}(-\tilde{a}_{22^*}),\quad \prod_{2^*\neq q\in P_2} t_{q2}(-\tilde{a}_{q2}),\ t_{2^*2}(-\tilde{a}_{2^*2}),$$

мы аналогичным образом приходим к $a=diag(0,0,\tilde{a}^2)$, где $\tilde{a}^2$ – некоторая матрица порядка $2mn-2$ и т.д. Этот процесс на m-м шаге приводит нас к матрице $a=diag(0,...,0,\tilde{a}^m)$ с клеткой $\tilde{a}^m$ порядка $m(2n-1)$. Последнее в неразвернутой форме интерпретируется как $a=diag(0,a^1)$, где порядок клетки a^1 равен $2n-1$. По лемме 1 в такой матрице a строка и столбец с номерами $n+1$ также обязаны быть нулевыми, т.е. для нее будем иметь $a=a(1)$. Повторяя описанные отщепления для клетки a^1, мы аналогичным образом приходим к $a=a(2)$ и т.д. Этот процесс на n-м шаге дает нам $a=a(n)=0$. А это и означает завершение процесса расщепления a на матрицы из (2).

§3. Соотношения группы $Sp^{\circ}(2n,R)$

Прежде чем приступить к написанию этих соотношений, вводим для индексов $i\in I(2mn)$ числа $p(i)=m\backslash[i-r(i)]+1$ (по-другому $p(i)$ – это номер диагональной клетки в разбиении матрицы (1) на клетки порядка m, куда входит индекс i). Вводим к рассмотрению также операторы $[\ ]_{ij}$ на R, $i,j\in I(2mn)$, определенные как

$$[\alpha]_{ij}=\begin{cases}\alpha,\ если\ p(i)=p(j),\\ 0\ \ в\ противном\ случае.\end{cases}$$

Для группы $Sp^{\circ}(2n,R)$ в алфавите (2) имеют место следующие соотношения:

1. $d_k(\varepsilon)\circ d_k(\sigma)=d_k(\varepsilon\circ\sigma)$;
2. $d_i(\varepsilon)\circ d_k(\sigma)=d_k(\sigma)\circ d_i(\varepsilon),\ i\neq k$;

3. $t_{ij}(\alpha)\circ d_k(\varepsilon)=d_k(\varepsilon)\circ t_{ij}(\alpha+\alpha x)$, где $x=[\varepsilon']_{ik}\circ[\varepsilon]_{jk}\circ[\varepsilon]_{ik^*}\circ[\varepsilon']_{jk^*}$;

4. $t_{ij}(\alpha)\circ t_{ij}(\beta)=t_{ij}(\alpha+\beta)$;

5. $t_{ik}(\alpha)\circ t_{kj}(\beta)=t_{kj}(\beta)\circ t_{j^*j}(-\varepsilon_{kj}[\alpha\beta^2]_{ik^*})\circ t_{ij}(x)\circ t_{ii^*}(-\varepsilon_{ik}[\alpha^2\beta]_{jk^*})\circ t_{ik}(\alpha)$,

$i\neq j$, где $x=\alpha\beta$ при $j\neq i^*$ и $x=2\alpha\beta$ при $j=i^*$;

6. $t_{ik}(\alpha)\circ t_{rj}(\beta)=t_{rj}(\beta)\circ t_{ik}(\alpha)$, $\{i^*,k\}\cap\{r,j^*\}=\varnothing$, $|\{i,k,r,j\}|\geq 3$;

7. $t_{ik}(\alpha)=t_{k^*i^*}(\varepsilon_{ik}\alpha), k^*\neq i$;

8. $t_{ik}(\alpha)\circ t_{ki}(\beta)=d_i(\sigma)\circ d_k(\varepsilon_{ik}^2\sigma')\circ t_{ki}(\beta+\sigma\beta)\circ t_{ik}(\alpha+\sigma'\alpha)$, $i<k$, $\sigma=\alpha\beta\not\equiv -e_i$;

9. для аргументов $a\in J\setminus\{0\}$

   a) $d_k(a)=d_{mp(k)}(a), k<mp(k)$,

   b) $t_{rj}(a)=t_{mp(r),mp(j)}(a), r<mp(r)$;

10. для номеров $i\leq mn$, $i^*\neq s\in P_i$ и аргументов $\alpha,\chi,\pi\in R_i$, $\alpha\not\equiv 0$, $\chi\pi\equiv -e_i$,

$$t_{is}(\alpha)\circ t_{ii^*}(\chi)\circ t_{i^*i}(\pi)=d_i(\sigma)\circ t_{s^*i}(\varepsilon_{is}\alpha\pi)\circ t_{si}(-\alpha)\circ t_{i^*i}(\pi+\sigma\pi-\alpha^2\pi)\circ d_s(\tau)\circ t_{s^*s}(d+\tau d)$$
$$\circ t_{ss^*}(c(\alpha+\tau'\alpha))\circ t_{s^*s}(\alpha)\circ t_{ii^*}(b)\circ t_{is^*}(c)\circ t_{is}(\alpha+\sigma'\alpha)\circ t_{si}(\alpha),$$

где $\sigma=\chi\pi-\alpha^2, b=\chi+\sigma'\chi+\chi(\alpha+\sigma'\alpha)^2, \tau=\alpha(\alpha+\sigma'\alpha)-\alpha^2c, c=-\varepsilon_{is}\chi(\alpha+\sigma'\alpha)$,

$d=-\alpha-a-\sigma'a,\ a=\alpha^5-\alpha^3+\varepsilon_{is}\alpha^2\pi$;

11. для номеров $i\leq mn$, $s, p\in P_i$, $p\neq s, s^*, i^*$, $s\neq i^*$, и аргументов

$\alpha,\chi,\pi\in R_i$, $\alpha\not\equiv 0$, $\chi\pi\equiv -e_i$,

$$t_{is}(\alpha)\circ t_{ip}(\chi)\circ t_{pi}(\pi)=d_i(\sigma)\circ t_{si}(-\alpha)\circ t_{pi}(\pi)\circ d_s(\tau)\circ t_{ps}(b)\circ d_p(\varepsilon)\circ t_{sp}(\chi c)\circ t_{ps}(\alpha)\circ$$
$$t_{ip}(\chi+\sigma'\chi)\circ t_{is}(\alpha+\sigma'\alpha)\circ t_{si}(\alpha),$$

где $\sigma=\chi\pi-\alpha^2$, $\tau=\alpha(\alpha+\sigma'\alpha)-\chi\alpha(\alpha+\sigma'\alpha), b=\chi\pi(\alpha+\sigma'\alpha)-\pi(\alpha+\sigma'\alpha)-\alpha,\ \varepsilon=$
$-\chi\pi-\chi\pi\sigma'-\chi bc,\ c=\alpha+\sigma'\alpha+\tau'(\alpha+\sigma'\alpha)$;

12. для номеров i,k, $k\in P_i$, $|\overline{R}_i|=2$

$$t_{ik}(e_i)\circ t_{ki}(e_i)\circ t_{ik}(e_i)\circ t_{ki}(e_i)=d_i(\sigma)\circ d_k(\varepsilon_{ik}^2\sigma')\circ t_{ki}(y)\circ t_{ik}(x),$$

где $\sigma=3e_i^2+e_i^4\,(\equiv 0)$, $x=a+\sigma'a\,(\equiv e_i)$, $y=a+\sigma a\,(\equiv e_i)$, $a=2e_i+e_i^3$.

В приведенном списке соотношения 1, 9 очевидны, а правильность 4 проверяется непосредственно. Остальные же серии нетривиальны и они требуют определенного пояснения. Здесь мы продемонстрируем выводы, выборочно, серий 5 и 11.

Вывод серии 5. Рассмотрим матрицу $V = t'_{kj}(\beta) \circ t_{ik}(\alpha) \circ t_{kj}(\beta) \circ t'_{ik}(\alpha)$. Непосредственные вычисления показывают, что $V = (\alpha\beta)_{ij} - (\varepsilon_{ik}[\alpha\beta]_{jk^*})_{ki^*} - (\varepsilon_{kj}[\alpha\beta]_{ik^*})_{j^*k} - (\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}\alpha\beta)_{j^*i^*} - (\varepsilon_{kj}[\alpha\beta^2]_{ik^*})_{j^*j} - (\varepsilon_{ik}[\alpha^2\beta]_{jk^*})_{ii^*}$.

Производим в полученной матрице следующие отщепления

$$W = t'_{j^*j}(-\varepsilon_{kj}[\alpha\beta^2]_{ik^*}) \circ V \circ t'_{ii^*}(-\varepsilon_{ik}[\alpha^2\beta]_{jk^*})$$

$$= (\alpha\beta)_{ij} - (\varepsilon_{ik}[\alpha\beta]_{jk^*})_{ki^*} - (\varepsilon_{kj}[\alpha\beta]_{ik^*})_{j^*k} - (\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}\alpha\beta)_{j^*i^*}.$$

Соотношение 5, очевидно, будет доказано, если мы покажем, что $W = t_{ij}(x)$. Доказательство этого факта использует следующие (легко проверяемые) свойства оператора ε_{ij}:

$$j \neq i, i^* \to \varepsilon_{i^*j} = \varepsilon_{ij^*} = -\varepsilon_{ij}; \quad \{i, i^*, j^*\} \cap \{k, k^*, j\} = \varnothing \to \varepsilon_{ik}\varepsilon_{k^*j} = \varepsilon_{ij}. \qquad (\varepsilon_{ij})$$

Тогда, действительно, если $k = i^*$, то мы используя первое свойство из (ε_{ij}), будем иметь $W = (\alpha\beta)_{ij} - (\varepsilon_{i^*j}\alpha\beta)_{j^*i^*} = (\alpha\beta)_{ij} + (\varepsilon_{ij}\alpha\beta)_{j^*i^*} = t_{ij}(\alpha\beta)$. Случай, когда $k = j^*$, аналогичным образом дает нам $W = (\alpha\beta)_{ij} - (\varepsilon_{ij^*}\alpha\beta)_{j^*i^*} = (\alpha\beta)_{ij} + (\varepsilon_{ij}\alpha\beta)_{j^*i^*}$ $= t_{ij}(\alpha\beta)$. Пусть теперь $k \neq i^*, j^*$. Здесь применение первого свойства из (ε_{ij}) приводит нас к $W = (\alpha\beta)_{ij} - (\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}\alpha\beta)_{j^*i^*} = (\alpha\beta)_{ij} + (\varepsilon_{ik}\varepsilon_{k^*j}\alpha\beta)_{j^*i^*}$. Если при этом $j \neq i^*$, то используя второе из свойств (ε_{ij}), преобразования можно закончить как $W = (\alpha\beta)_{ij} + (\varepsilon_{ij}\alpha\beta)_{j^*i^*} = t_{ij}(\alpha\beta)$. При $j = i^*$, как легко проверить, оператор $\varepsilon_{ik}\varepsilon_{k^*j}$ является тождественным. Поэтому в этом случае $W = (\alpha\beta)_{ii^*} + (\alpha\beta)_{ii^*} = t_{ii^*}(2\alpha\beta)$.

Вывод серии 11. Прежде чем приступить к доказательству этого “длинного” соотношения, остановимся на следующих фактах. Покажем сперва квазиобратимость аргументов σ, τ и ε. Квазиобратимость σ видна из $\sigma = \chi\pi - \alpha^2 \equiv -e_i - \alpha^2 \not\equiv -e_i$. Имеем импликации

$\sigma \circ \sigma' - \chi(\sigma \circ \sigma') = 0 \to \alpha^2(\sigma + \sigma\sigma' - \chi\sigma - \chi\sigma\sigma' + \sigma' - \chi\sigma') = 0 \to \sigma(\alpha^2 + \sigma'\alpha^2 - \chi\alpha^2 -$

$\chi\sigma'\alpha^2)+\sigma'\alpha^2-\chi\alpha^2-\chi\sigma'\alpha^2+\chi\alpha^2=0\to\chi\pi-\alpha^2+(\chi\pi-\alpha^2)[\alpha^2+\sigma'\alpha^2-\chi(\alpha^2+\sigma'\alpha^2)]$
$+\alpha^2+\sigma'\alpha^2-\chi(\alpha^2+\sigma'\alpha^2)=\chi\pi-\chi\alpha^2\to$

$$\sigma\circ\tau=\chi\pi-\chi\alpha^2. \qquad (\sigma\circ\tau)$$

Поскольку в последнем равенстве $\chi\pi-\chi\alpha^2\equiv-e_i-\chi\alpha^2\not\equiv-e_i$, элемент $\chi\pi-\chi\alpha^2$ также является квазиобратимым. Отсюда тут же следует квазиобратимость и аргумента τ.

Квазиобратимость ε показывается несколько сложнее. Положив $a=\alpha^3-\alpha-\alpha\pi$ и производив непосредственные вычисления, находим

$$b+\chi(\pi-\alpha^2)b=a+\tau a \qquad (s^*p^*)$$

(b – элемент, определенный как в 11). При обозначениях 11 имеем также
$\tau'\circ\tau+\sigma'(\tau'\circ\tau)=0\to\alpha+\sigma'\alpha+\tau'(\alpha+\sigma'\alpha)+\tau[\alpha+\sigma'\alpha+\tau'(\alpha+\sigma'\alpha)]=\alpha+\sigma'\alpha\to$

$$c+\tau c=\alpha+\sigma'\alpha\to a(c+\tau c)=a(\alpha+\sigma'\alpha)\to c(a+\tau a)=\alpha(a+\sigma'a).$$

Последнее в объединении с (s^*p^*) дает нам

$$bc+\chi(\pi-\alpha^2)bc=c(a+\tau a)=\alpha(a+\sigma'a). \qquad (cs^*p^*)$$

Но с другой стороны
$\alpha^2+\sigma'\pi+\chi\pi^2+\chi\pi^2\sigma'-\chi\pi\alpha^2-\chi\pi\alpha^2\sigma'=\alpha^2+\sigma'\pi+\pi(\sigma+\alpha^2)+\pi\sigma'(\sigma+\alpha^2)-$
$\alpha^2(\sigma+\alpha^2)-(\sigma+\alpha^2)\alpha^2\sigma'=-\alpha^4+\alpha^2+\pi\alpha^2-\sigma'(\alpha^4-\alpha^2-\pi\alpha^2)=-\alpha(a+\sigma'a).$

Тогда
$bc+\chi(\pi-\alpha^2)bc+\alpha^2+\sigma'\pi+\chi\pi^2+\chi\pi^2\sigma'-\chi\pi\alpha^2-\chi\pi\alpha^2\sigma'=0\to-\chi(\pi+\sigma'\pi+bc)-$
$\chi(\pi+\sigma'\pi+bc)(\chi\pi-\chi\alpha^2)+\chi\pi-\chi\alpha^2=0\to[-\chi(\pi+\sigma'\pi+bc)]\circ(\chi\pi-\chi\alpha^2)=0\to$
$\varepsilon\circ(\chi\pi-\chi\alpha^2)=0.$

Последнее показывает, что аргумент ε не только квазиобратим, но и для него $\varepsilon'=\chi\pi-\chi\alpha^2$.

Ниже помимо $(\sigma\circ\tau)$, (s^*p^*), (cs^*p^*) используются и другие кольцевые соотношения между аргументами α,χ,π. Применяя $(\sigma\circ\tau)$, имеем
$\chi c(\pi-\alpha^2)=\chi(\pi-\alpha^2)[\alpha+\alpha(\sigma'\circ\tau')]=\alpha[\chi(\pi-\alpha^2)+\chi(\pi-\alpha^2)(\sigma'\circ\tau')]=$
$\alpha[-(\sigma'\circ\tau')]=-\alpha(\sigma'\circ\tau')=\alpha-c,$

т.е.

$$\chi c(\pi-\alpha^2)=\alpha-c. \qquad (p^*s^*)$$

Нам потребуется еще одно кольцевое соотношение

$$\chi c(a+\tau a)=\tau-\tau\alpha^2-\alpha^2. \qquad (s^*s^*)$$

Его справедливость применением (cs^*p^*) следует из

$$\tau-\tau\alpha^2-\alpha^2=\alpha^2+\sigma'\alpha^2-\chi(\alpha^2+\sigma'\alpha^2)-[\alpha^2+\sigma'\alpha^2-\chi(\alpha^2+\sigma'\alpha^2)]\alpha^2-\alpha^2=$$
$$\alpha[\sigma'\alpha-\chi\alpha-\chi\sigma'\alpha-\alpha(\chi\pi+\chi\pi\sigma'+\sigma')+\alpha\chi(\chi\pi+\chi\pi\sigma'+\sigma')]=$$
$$\alpha\chi[-\alpha-\alpha\sigma'-\alpha\pi-\alpha\pi\sigma'+\alpha\pi\chi+\chi\pi\alpha\sigma'+\alpha\sigma']=\alpha\chi[-\alpha-\alpha\pi-\alpha\pi\sigma'+(\alpha^2+\sigma)\alpha+$$
$$(\alpha^2+\sigma)\alpha\sigma']=\alpha\chi[\alpha^3-\alpha-\alpha\pi+\sigma'(\alpha^3-\alpha-\alpha\pi)]=\chi[\alpha(a+\sigma'a)]=\chi c(a+\tau a).$$

Далее, прямые вычисления показывают, что $V=t_{is}(\alpha)\circ t_{ip}(\chi)\circ t_{pi}(\pi)=$ $[(\alpha)_{is}+(\varepsilon_{is}\alpha)_{s^*i^*}]\circ[(\chi)_{ip}+(\varepsilon_{ip}\chi)_{p^*i^*}]\circ[(\pi)_{pi}+(\varepsilon_{ip}\pi)_{i^*p^*}]=(\alpha)_{is}+(\varepsilon_{is}\alpha)_{s^*i^*}+(\varepsilon_{is}\varepsilon_{ip}\alpha\pi)_{s^*p^*}$ $+(\chi)_{ip}+(\varepsilon_{ip}\chi)_{p^*i^*}+(\chi\pi)_{ii}+(\chi\pi)_{p^*p^*}+(\pi)_{pi}+(\varepsilon_{ip}\pi)_{i^*p^*}$. Учитывая теперь равенства (s^*p^*), (p^*s^*), (s^*s^*), $\varepsilon'=\chi\pi-\chi\alpha^2$ и используя обозначения соотношения 11, производим в матрице V следующие отщепления:

$$V_1=V\circ t'_{si}(\alpha)=V\circ[-(\alpha)_{si}-(\varepsilon_{is}\alpha)_{i^*s^*}]=(\sigma)_{ii}+(\alpha)_{is}+(\varepsilon_{is}\alpha)_{s^*i^*}+(\varepsilon_{is}\varepsilon_{ip}\alpha\pi)_{s^*p^*}+(\chi)_{ip}+$$
$$(\varepsilon_{ip}\chi)_{p^*i^*}+(\chi\pi)_{p^*p^*}+(\pi)_{pi}+(\varepsilon_{ip}\pi)_{i^*p^*}-(\alpha^2)_{s^*s^*}-(\varepsilon_{ip}\varepsilon_{is}\alpha\chi)_{p^*s^*}-(\alpha)_{si}-(\varepsilon_{is}\alpha)_{i^*s^*};$$

$$V_2=d'_i(\sigma)\circ V_1=[(\sigma')_{ii}+(\sigma)_{i^*i^*}]\circ V_1=(\sigma)_{i^*i^*}+(\alpha+\sigma'\alpha)_{is}+(\chi+\sigma'\chi)_{ip}+(\varepsilon_{ip}(\pi+\sigma\pi))_{i^*p^*}-$$
$$(\varepsilon_{is}(\alpha+\sigma\alpha))_{i^*s^*}+(\varepsilon_{is}\alpha)_{s^*i^*}+(\varepsilon_{is}\varepsilon_{ip}\alpha\pi)_{s^*p^*}+(\varepsilon_{ip}\chi)_{p^*i^*}+(\chi\pi)_{p^*p^*}+(\pi)_{pi}-(\alpha^2)_{s^*s^*}-$$
$$(\varepsilon_{ip}\varepsilon_{is}\alpha\chi)_{p^*s^*}-(\alpha)_{si};$$

$$V_3=V_2\circ t'_{is}(\alpha+\sigma'\alpha)=V_2\circ[-(\alpha+\sigma'\alpha)_{is}-(\varepsilon_{is}(\alpha+\sigma'\alpha))_{s^*i^*}]=(\chi\pi)_{i^*i^*}+(\chi+\sigma'\chi)_{ip}+$$
$$(\varepsilon_{ip}(\pi+\sigma\pi))_{i^*p^*}-(\varepsilon_{is}(\alpha+\sigma\alpha))_{i^*s^*}+(\varepsilon_{is}\chi\pi(\alpha+\sigma'\alpha))_{s^*i^*}+(\varepsilon_{is}\varepsilon_{ip}\alpha\pi)_{s^*p^*}+$$
$$(\varepsilon_{ip}(\chi+\pi\chi^2+\sigma'(\chi+\pi\chi^2))_{p^*i^*}+(\chi\pi)_{p^*p^*}+(\pi)_{pi}-(\alpha^2)_{s^*s^*}-(\varepsilon_{ip}\varepsilon_{is}\alpha\chi)_{p^*s^*}-(\alpha)_{si}-$$
$$(\pi(\alpha+\sigma'\alpha))_{ps}+(\alpha(\alpha+\sigma'\alpha))_{ss};$$

$$V_4=V_3\circ t'_{ip}(\chi+\sigma'\chi)=V_3\circ[-(\chi+\sigma'\chi)_{ip}-(\varepsilon_{ip}(\chi+\sigma'\chi))_{p^*i^*}]=(\varepsilon_{ip}(\pi+\sigma\pi))_{i^*p^*}-$$
$$(\varepsilon_{is}(\alpha+\sigma\alpha))_{i^*s^*}+(\varepsilon_{is}\varepsilon_{ip}\alpha\pi)_{s^*p^*}+(\chi\pi)_{p^*p^*}+(\pi)_{pi}-(\alpha^2)_{s^*s^*}-(\varepsilon_{ip}\varepsilon_{is}\alpha\chi)_{p^*s^*}-(\alpha)_{si}-$$
$$(\pi(\alpha+\sigma'\alpha))_{ps}+(\alpha(\alpha+\sigma'\alpha))_{ss}-(\pi(\chi+\sigma'\chi))_{pp}+(\chi(\alpha+\sigma'\alpha))_{sp};$$

$$V_5=t'_{si}(-\alpha)\circ V_4=[(\alpha)_{si}+(\varepsilon_{is}\alpha)_{i^*s^*}]\circ V_4=-(\varepsilon_{is}\alpha\chi\pi)_{i^*s^*}+(\varepsilon_{ip}(\pi+\chi\pi^2))_{i^*p^*}+(\varepsilon_{is}\varepsilon_{ip}\alpha\pi)_{s^*p^*}$$
$$+(\chi\pi)_{p^*p^*}+(\pi)_{pi}-(\alpha^2)_{s^*s^*}-(\varepsilon_{ip}\varepsilon_{is}\alpha\chi)_{p^*s^*}-(\pi(\alpha+\sigma'\alpha))_{ps}+(\alpha(\alpha+\sigma'\alpha))_{ss}-(\pi(\chi+\sigma'\chi))_{pp}$$

$+(\chi(\alpha+\sigma'\alpha))_{sp}$;

$V_6 = t'_{pi}(\pi)\circ V_5 = [-(\pi)_{pi} - (\varepsilon_{ip}\pi)_{i^*p^*}]\circ V_5 = -(\varepsilon_{sp}\alpha\pi)_{s^*p^*} + (\chi\pi)_{p^*p^*} - (\alpha^2)_{s^*s^*} + (\varepsilon_{sp}\alpha\chi)_{p^*s^*} - (\pi(\alpha+\sigma'\alpha))_{ps} + (\alpha(\alpha+\sigma'\alpha))_{ss} - (\pi(\chi+\sigma'\chi))_{pp} + (\chi(\alpha+\sigma'\alpha))_{sp}$;

$V_7 = V_6\circ t'_{ps}(\alpha) = V_6\circ[-(\alpha)_{ps} - (\varepsilon_{ps}\alpha)_{s^*p^*}] = (\varepsilon_{sp}a)_{s^*p^*} + (\chi(\pi-\alpha^2))_{p^*p^*} - (\alpha^2)_{s^*s^*} +$

$(\varepsilon_{sp}\alpha\chi)_{p^*s^*} + (b)_{ps} + (\tau)_{ss} - (\pi(\chi+\sigma'\chi))_{pp} + (\chi(\alpha+\sigma'\alpha))_{sp}$;

$V_8 = d'_s(\tau)\circ V_7 = [(\tau')_{ss} + (\tau)_{s^*s^*}]\circ V_7 = (\tau-\tau\alpha^2-\alpha^2)_{s^*s^*} + (\chi c)_{sp} + (\varepsilon_{sp}(a+\tau a))_{s^*p^*} +$

$(\chi(\pi-\alpha^2))_{p^*p^*} + (\varepsilon_{sp}\alpha\chi)_{p^*s^*} + (b)_{ps} - (\pi(\chi+\sigma'\chi))_{pp}$;

$V_9 = V_8\circ t'_{sp}(\chi c) = V_8\circ[-(\chi c)_{sp} - (\varepsilon_{sp}\chi c)_{p^*s^*}] = (\tau-\tau\alpha^2-\alpha^2-\chi c(a+\tau a))_{s^*s^*} +$

$(\varepsilon_{sp}(a+\tau a))_{s^*p^*} + (\chi(\pi-\alpha^2))_{p^*p^*} + (\varepsilon_{sp}\chi(\alpha-c-\chi c(\pi-\alpha^2))_{p^*s^*} + (b)_{ps} -$

$(\chi(\pi+\sigma'\pi+bc))_{pp} = (\varepsilon_{sp}(a+\tau a))_{s^*p^*} + (\chi(\pi-\alpha^2))_{p^*p^*} + (b)_{ps} - (\chi(\pi+\sigma'\pi+bc))_{pp}$;

$V_{10} = t'_{ps}(b)\circ V_9 = [-(b)_{ps} - (\varepsilon_{sp}b)_{s^*p^*}]\circ V_9 = (\varepsilon_{sp}(a+\tau a-\chi b(\pi-\alpha^2)-b))_{s^*p^*} + (\chi(\pi-\alpha^2))_{p^*p^*} - (\chi(\pi+\sigma'\pi+bc))_{pp} = (\varepsilon)_{pp} + (\varepsilon')_{p^*p^*} = d_p(\varepsilon).$

Собирая теперь полученные равенства, мы приходим к $t'_{ps}(b)\circ d'_s(\tau)\circ$ $t'_{pi}(\pi)\circ t'_{si}(-\alpha)\circ d'_i(\sigma)\circ V\circ t'_{si}(\alpha)\circ t'_{is}(\alpha+\sigma'\alpha)\circ t'_{ip}(\chi+\sigma'\chi)\circ t'_{ps}(\alpha)\circ t'_{sp}(\chi c) = d_p(\varepsilon)$, что и означает правильность соотношения 11.

§4. Производные разложения

Наши дальнейшие рассуждения помимо основных соотношений 1–12 используют также некоторые следствия из них. Прежде чем сформулировать их, примем следующие соглашения. Ниже под $*$ соглашаемся понимать некоторые элементы из R_i (индексы i определяются по контексту), принимающие вообще говоря различные значения на разных местах. Аналогичным образом $\cdot$ будет означать некоторые радикальные элементы. Далее, для слов W, V алфавита (2) под $\begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix}$ соглашаемся понимать одно из этих слов: W или V. Ниже при вычислениях $\overset{\frown}{x}$ будет означать некоторый элемент из R_i, для которого $\overset{\frown}{x} \equiv x \quad (x \in R_i)$.

Упомянутыми производными разложениями являются:

$$t_{kj}(\beta)\circ t_{ik}(\alpha)=t_{ik}(\alpha)\circ t_{ii^*}(-\varepsilon_{ik}[\alpha^2\beta]_{jk^*})\circ t_{ij}(-x)\circ t_{j^*j}(-\varepsilon_{kj}[\alpha\beta^2]_{ik^*})\circ t_{kj}(\beta),\ j\neq i, \tag{4}$$

где $x=\alpha\beta$ при $j\neq i^*$ и $x=2\alpha\beta$ при $j=i^*$;

$$t_{ki}(\beta)\circ t_{ik}(\alpha)=d_k(*)\circ d_i(*)\circ t_{ik}(*)\circ t_{ki}(*),\quad i<k,\ \beta\alpha\not\equiv -e_i; \tag{5}$$

$$(is)\circ d_k(\varepsilon)=d_k(\varepsilon)\circ(is),\quad s>i; \tag{6}$$

$$(is)\circ t_{is}(\alpha)=d_i(*)\circ d_s(*)\circ t_{si}(*)\circ(is),\quad s>i; \tag{7}$$

$$(is)\circ t_{si}(\alpha)=\begin{bmatrix} d_i(*)\circ d_s(*)\circ t_{si}(*)\circ t_{is}(*) \\ (is)\end{bmatrix},\quad s>i; \tag{8}$$

$$(is)\circ t_{is^*}(\alpha)=t_{is^*}(-\overset{\frown}{\alpha})\circ t_{ii^*}(\cdot)\circ t_{ss^*}(2\pi\alpha)\circ(is),\quad i<s\neq i^*; \tag{9}$$

$$(is)\circ t_{ii^*}(\alpha)=t_{is^*}(\cdot)\circ t_{ss^*}(-\varepsilon_{is}\pi^2\alpha)\circ t_{ii^*}(\cdot)\circ(is),\quad i<s\neq i^*; \tag{10}$$

$$(ii^*)\circ t_{ij}(\alpha)=t_{ij}(\cdot)\circ t_{j^*j}(\cdot)\circ t_{i^*j}(\pi\alpha)\circ(ii^*),\qquad i<i^*\neq j; \tag{11}$$

$$(is)\circ t_{ij}(\alpha)=t_{ij}(\cdot)\circ t_{sj}(\pi\alpha)\circ(is),\quad i<s\neq i^*,\quad j\neq s,\ s^*,\ i^*; \tag{12}$$

$$(is)\circ t_{ss^*}(\alpha)=t_{ss^*}(\alpha)\circ t_{ii^*}(-\varepsilon_{is}\chi^2\alpha)\circ t_{is^*}(\chi\alpha)\circ(is),\quad s^*\neq i<s; \tag{13}$$

$$(is)\circ t_{si^*}(\alpha)=t_{si^*}(-\overset{\frown}{\alpha})\circ t_{ss^*}(-2\varepsilon_{is}\pi\alpha)\circ t_{ii^*}(\cdot)\circ(is),\quad i<s; \tag{14}$$

$$(ii^*)\circ t_{i^*j}(\alpha)=t_{i^*j}(\alpha)\circ t_{j^*j}(\varepsilon_{ij}\chi\alpha^2)\circ t_{ij}(\chi\alpha)\circ(ii^*),\qquad j\neq i<i^*; \tag{15}$$

$$(is)\circ t_{sj}(\alpha)=t_{sj}(\alpha)\circ t_{ij}(\chi\alpha)\circ(is),\quad i<s\neq i^*,\quad j\neq i,i^*,\ s^*; \tag{16}$$

$$(is)\circ t_{s^*i}(\alpha)=t_{s^*i}(-\overset{\frown}{\alpha})\circ t_{s^*s}(\cdot)\circ t_{i^*i}(2\varepsilon_{is}\pi\alpha)\circ(is),\quad s>i; \tag{17}$$

$$(is)\circ t_{i^*i}(\alpha)=t_{i^*i}(\alpha)\circ t_{s^*i}(\varepsilon_{is}\chi\alpha)\circ t_{s^*s}(-\varepsilon_{is}\chi^2\alpha)\circ(is),\quad i<s\neq i^*; \tag{18}$$

$$(ii^*)\circ t_{ri}(\alpha)=t_{ri}(\alpha)\circ t_{rr^*}(-\varepsilon_{ir}\alpha^2\chi)\circ t_{ri^*}(-\chi\alpha)\circ(ii^*),\quad i<i^*\neq r; \tag{19}$$

$$(is)\circ t_{ri}(\alpha)=t_{ri}(\alpha)\circ t_{rs}(-\chi\alpha)\circ(is),\quad i<s\neq i^*,\ r\neq s,\ s^*,i^*; \tag{20}$$

$$(is)\circ t_{s^*s}(\alpha)=t_{i^*i}(-\varepsilon_{is}\pi^2\alpha)\circ t_{s^*i}(\cdot)\circ t_{s^*s}(\cdot)\circ(is),\quad i<s\neq i^*; \tag{21}$$

$$(is)\circ t_{rs}(\alpha)=t_{rs}(\cdot)\circ t_{ri}(-\pi\alpha)\circ(is),\quad i<s\neq i^*,\ r\neq i,\ i^*,\ s^*; \tag{22}$$

$$(is)\circ t_{rj}(\alpha)=t_{rj}(\alpha)\circ(is),\quad s>i,\quad \{i,s\}\cap\{r,j,r^*,j^*\}=\varnothing. \tag{23}$$

Этот список, как и основные соотношения 1–12, также требует определенного пояснения. Разложение (4) следует из 5 взятием квазиобратных от обеих частей и заменой $-\alpha, -\beta$ на α, β соответственно (используется 4). Разложение (5) следует из 8, 4 и 3 аналогичным образом.

Вывод разложения (6). Действительно, исходя из левой части и используя 3, имеем

$$(is)\circ d_k(\varepsilon)=t_{is}(\chi)\circ[t_{si}(\pi)\circ d_k(\varepsilon)]=[t_{is}(\chi)\circ d_k(\varepsilon)]\circ t_{is}(\pi+\pi x)=$$

$$d_k(\varepsilon)\circ t_{is}(\chi+\chi x')\circ t_{si}(\pi+\pi x), \qquad \text{где} \qquad x=[\varepsilon']_{sk}\circ[\varepsilon]_{ik}\circ[\varepsilon]_{sk^*}\circ[\varepsilon']_{ik^*}.$$

Поскольку в последнем члене цепочки

$(\chi+\chi x')(\pi+\pi x)=\chi\pi+\chi\pi(x+x'x+x')=\chi\pi\equiv -e_i$, он дает нам $d_k(\varepsilon)\circ(is)$.

Вывод разложения (7). Левая часть (7) имеет вид $V=(is)\circ t_{is}(\alpha)=$ $t_{is}(\chi)\circ t_{si}(\pi)\circ t_{is}(\alpha)$. Разберем сначала случай $\pi\alpha\not\equiv -e_i$. Здесь мы используя разложение (5) и соотношения $2-4$, находим $V=t_{is}(\chi)\circ[t_{si}(\pi)\circ t_{is}(\alpha)]=$ $d_i(*)\circ d_s(*)\circ[t_{is}(*)\circ t_{is}(*)]\circ t_{si}(y)=d_i(\varepsilon)\circ d_s(*)\circ t_{is}(x)\circ t_{si}(y)$. Сравнение позиций $<i,i>$ крайних членов полученной цепочки показывает, что

$$\chi\pi=\varepsilon\circ(xy)\to -e_i\equiv\varepsilon\circ(xy)\to xy\equiv -e_i.$$

Поэтому рассматриваемый случай дает нам $V=d_i(\varepsilon)\circ d_s(*)\circ t_{si}(0)\circ(is)$, т.е. форму требуемого вида.

Пусть теперь $\pi\alpha\equiv -e_i$. Если здесь $|R_i|\geq 3$, то найдется нерадикальный элемент $\beta\in R_i$, для которого $\beta\not\equiv\pi$. Применение 1–4 и (5) в этом случае приводит нас к

$$V=t_{si}(-\beta)\circ[t_{si}(\beta)\circ t_{is}(\chi)]\circ t_{si}(\pi)\circ t_{is}(\alpha)=d_i(*)\circ d_s(*)\circ t_{si}(*)\circ t_{is}(*)\circ[t_{si}(*)\circ t_{si}(\pi)]\circ$$
$$t_{is}(\alpha)=d_i(*)\circ d_s(*)\circ t_{si}(*)\circ t_{is}(*)\circ[t_{si}(*)\circ t_{is}(\alpha)]=d_i(\tau)\circ d_s(*)\circ t_{si}(*)\circ[t_{is}(*)\circ t_{is}(*)]$$
$$\circ t_{si}(\delta)=d_i(\tau)\circ d_s(*)\circ t_{si}(*)\circ t_{is}(\gamma)\circ t_{si}(\delta).$$

И в этой цепочке сравнивая позиции $<i,i>$ ее крайних звеньев, находим $\chi\pi=\tau\circ(\gamma\delta)$. А это, как мы уже видели, дает нам $\gamma\delta\equiv -e_i$, т.е. снова слово нужного вида $V=d_i(*)\circ d_s(*)\circ t_{si}(*)\circ(is)$.

Переходим к случаю $|R_i|=2$. Используя 1–4, (5), 8, 10, здесь можно выполнить следующие преобразования

$$V=t_{is}(\chi)\circ[t_{si}(\pi)\circ t_{is}(\cdot)]\circ t_{is}(e_i)=d_i(\cdot)\circ d_s(\cdot)\circ t_{is}(\overset{\frown}{\chi})\circ t_{si}(\overset{\frown}{\chi})\circ t_{is}(e_i)=$$

$$d_i(\cdot)\circ d_s(\cdot)\circ[t_{is}(\overset{\frown}{\chi})\circ t_{si}(\cdot)]\circ t_{si}(e_i)\circ t_{is}(e_i)=d_i(\cdot)\circ d_s(\cdot)\circ t_{si}(\cdot)\circ t_{is}(\overset{\frown}{\chi})\circ t_{si}(e_i)\circ t_{is}(e_i)=$$

$$d_i(\cdot)\circ d_s(\cdot)\circ[t_{si}(\cdot)\circ t_{is}(\cdot)]\circ[t_{is}(e_i)\circ t_{si}(e_i)\circ t_{is}(e_i)\circ t_{si}(e_i)]\circ t_{si}(-e_i)=$$

$$d_i(\cdot)\circ d_s(\cdot)\circ t_{is}(\cdot)\circ[t_{si}(\cdot)\circ t_{si}(\overset{\frown}{\chi})]\circ t_{is}(\overset{\frown}{\chi})\circ t_{si}(-e_i)=d_i(\cdot)\circ d_s(\cdot)\circ[t_{is}(\cdot)\circ t_{si}(\overset{\frown}{\chi})]\circ t_{is}(\overset{\frown}{\chi})\circ t_{si}(-e_i)=$$

$$d_i(\cdot)\circ d_s(\cdot)\circ t_{si}(\overset{\frown}{\chi})\circ[t_{is}(\cdot)\circ t_{is}(\overset{\frown}{\chi})]\circ t_{si}(-e_i)=d_i(\cdot)\circ d_s(\cdot)\circ t_{si}(\overset{\frown}{\chi})\circ t_{is}(\overset{\frown}{\chi})\circ t_{si}(-e_i).$$

Поскольку здесь $\chi(-e_i)\equiv -e_i$, полученное слово также дает нам требуемый вид

$$V=d_i(\cdot)\circ d_s(\cdot)\circ t_{si}(*)\circ(is).$$

Выводимость разложений (8) – (22) из 1 –12 показывается аналогично (7). Разложение (23) напрямую следует из соотношений перестановочности 6. Равенства (6) – (8) показывают, что при перекидывании через $d_k(\varepsilon)$, $t_{is}(\alpha)$, $t_{si}(\alpha)$
(направо) “транспозиционный” сомножитель $(is)=t_{is}(\chi)\circ t_{si}(\pi)$ может менять свои аргументы.

§5. Центральные леммы

Наши дальнейшие рассуждения используют следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть нам задана форма* $G_i=\prod_{q\in Q_i}t_{iq}(\alpha_q)$, $1\le i\le mn$, *и пусть*

$p,r,\dots,s$ – *произвольная перестановка номеров из* Q_i. *Тогда для нее применяя соотношения* 4 – 7, *можно выполнить преобразование*

$$G_i=t_{ip}(\beta_p)\circ t_{ir}(\beta_r)\circ\dots\circ t_{is}(\beta_s), \qquad (=)$$

где $\beta_t=\alpha_t$ *при всех* $t\ne i^*$ *(т.е. изменяя, быть может, аргумент* α_{i^*} *в* G_i, *как угодно можно переставлять ее сомножители).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t_{ik}(\alpha_k)$, $t_{iq}(\alpha_q)$ $(k\ne q)$ – какие-нибудь соседние буквы из G_i и нам потребуется переставлять их. Если здесь $k\ne q^*$, то они переставляются по обычному с помощью соотношений 6. Пусть $k = q^*$. В этом случае используя 7 и 5, для них мы имеем

$$t_{iq^*}(\alpha_{q^*}) \circ t_{iq}(\alpha_q) = t_{iq^*}(\alpha_{q^*}) \circ t_{q^*i^*}(\varepsilon_{iq}\alpha_q) = t_{q^*i^*}(\varepsilon_{iq}\alpha_q) \circ t_{ii^*}(\beta) \circ t_{iq^*}(\alpha_{q^*}) =$$

$$t_{iq}(\alpha_q) \circ t_{ii^*}(\beta) \circ t_{iq^*}(\alpha_{q*}),$$

где $\beta = 2\varepsilon_{iq}\alpha_q\alpha_{q^*}$. Подставляя найденное выражение в G_i, затем передвигая букву $t_{ii^*}(\beta)$ с помощью 6, мы добиваемся такой ее записи, где буквы $t_{ii^*}(\beta)$ и $t_{ii^*}(\alpha_{i^*})$ стоят рядом. Собрав эти буквы с помощью 4, мы приходим к форме G_i, где буквы $t_{iq^*}(\alpha_{q^*}), t_{iq}(\alpha_q)$ переставлены, а в $t_{ii^*}(\alpha_{i^*})$ изменен аргумент. Теперь нетрудно видеть, что выполняя описанные "перестановки" несколько раз (и в надлежащем порядке), можно привести G_i к виду (=), где, возможно, изменен только аргумент α_{i^*}. Лемма 2 доказана.

Легко видеть, что при необходимости применяя 7, всякую квазитрансвекцию из (2) можно представить в одном из видов:

$$t_{rj}(\alpha) \text{или } t_{jr}(\alpha), \text{ где } 1 \le r \le mn,\ j \in P_r.$$

Такие представления квазитрансвекций будем называть их *естественными* формами. Всюду ниже, где это необходимо, естественность буквы $t_{rj}(\alpha)$ мы условимся подчеркивать как $\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)$ (т.е. "ожиряя" ее).

Введем теперь на множестве всех слов алфавита (2) (бинарные) отношения $\overset{i}{\underset{\sim}{\to}}$, $1 \le i \le mn$, положив $W \overset{i}{\underset{\sim}{\to}} V$ в том и только том случае, когда эти слова связаны соотношением $W = X \circ V$, где X – некоторое слово, не содержащее ненулевые квазитрансвекции вида $\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)$, для которых $r < j$ и $r \le i$. Введенные отношения $\overset{i}{\underset{\sim}{\to}}$ являются рефлексивными и транзитивными. Наряду с G_i введем к рассмотрению также формы $F_i = \prod_{q \in P_i} t_{iq}(\alpha_q),\ 1 \le i \le mn$ (ясно, что $G_i = \prod_{q \in Q_i} t_{iq}(\alpha_q)$ дает форму F_i в том и только том случае, когда $\alpha_q = 0$ при всех $q < i$). Если в введенной форме F_i отсутствует буква $t_{ip}(\alpha_p),\ p \in P_i$, то этот факт мы условимся подчеркивать как $F_i(\ne p)$. Ниже аналогичный смысл придается и записям $F_i(\ne p,q), F_i(\ne p,q,r)$ и т.д.

Лемма 3. *Пусть нам задано слово* $V=F_i(\neq p,q)\circ t_{pq}(\alpha),1\le i\le mn,$ *где* $p,q-$ *различные номера из* $P_i\setminus\{i^*\}$. *Тогда применяя к нему соотношения* 4–7, *можно выполнить преобразование*

$$V\overset{i}{\tilde{\to}}\prod_{r\in P_i\setminus\{p,q\}}t_{ir}(\beta_r)=\tilde{F}_i(\neq p,q),$$

где $\beta_r=\alpha_r$ *при всех* $r\neq p^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для краткости изложения всюду далее под $\tilde{\to}$ мы условимся понимать $\overset{i}{\tilde{\to}}$. Тогда действительно, если $p=q^*$, то используя 6 и по определению $\overset{i}{\tilde{\to}}$ имеем $V=F_i(\neq p,q,r)\circ[t_{ir}(\alpha_r)\circ t_{q^*q}(\alpha)]=[F_i(\neq q^*,q,r)\circ t_{q^*q}(\alpha)]\circ t_{ir}(\alpha_r)=\ldots=t_{q^*q}(\alpha)\circ F_i(\neq q^*,q)\tilde{\to}F_i(\neq p,q)$. Пусть $p\neq q^*$. Здесь мы применяя соотношения 4–7 и лемму 2, находим

$V\tilde{\to}F_i(\neq p,q,p^*)\circ[t_{ip^*}(\alpha_{p^*})\circ t_{pq}(\alpha)]\tilde{\to}F_i(\neq p,q,p^*)\circ t_{pq}(\alpha)\circ t_{ip^*}(\alpha_{p^*})=$

$F_i(\neq p,q,p^*,q^*)\circ[t_{iq^*}(\alpha_{q^*})\circ t_{q^*p^*}(\varepsilon_{pq}\alpha)]\circ t_{ip^*}(\alpha_{p^*})=F_i(\neq p,q,p^*,q^*)\circ t_{q^*p^*}(\varepsilon_{pq}\alpha)\circ$

$[t_{ip^*}(x)\circ t_{iq^*}(\alpha_{q^*})]\circ t_{ip^*}(\alpha_{p^*})=F_i(\neq p,q,p^*,q^*,r)\circ[t_{ir}(\alpha_r)\circ t_{pq}(\alpha)]\circ t_{iq^*}(\alpha_{q^*})\circ$

$[t_{ip^*}(x)\circ t_{ip^*}(\alpha_{p^*})]=[F_i(\neq p,q,p^*,q^*,r)\circ t_{pq}(\alpha)]\circ t_{ir}(\alpha_r)\circ t_{iq^*}(\alpha_{q^*})\circ t_{ip^*}(\beta_{p^*})=$

$\ldots=t_{pq}(\alpha)\circ F_i(\neq p,q)\tilde{\to}\tilde{F}_i(\neq p,q)$

(в этих вычислениях $\beta_{p^*}=x+\alpha_{p^*}$).

Лемма 4. *Пусть задано слово* $V=F_i(\neq q)\circ t_{qi}(\alpha)$, *где* $q\in P_i\setminus\{i^*\}$. *Тогда применяя к нему соотношения* (4), 4–7, *можно выполнить преобразование*

$$V\overset{i}{\tilde{\to}}\prod_{p\in P_i\setminus\{q\}}t_{ip}(\beta_p)=\tilde{F}_i(\neq q),$$

где β_p *– некоторые элементы из* R_p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В проводимых ниже вычислениях r считается произвольным номером из $P_i\setminus\{q,q^*,i^*\}$. Тогда применение указанных в формулировке соотношений, а также лемм 2 и 3 (последние, как мы уже видели, следуют из 4–7) действительно дает нам

$V=F_i(\neq q,r)\circ[t_{ir}(\alpha_r)\circ t_{qi}(\alpha)]=F_i(\neq q,r)\circ[t_{qi}(\alpha)\circ t_{qr}(*)]\circ t_{ir}(\alpha_r)=$

$[F_i(\neq q,r)\circ t_{qr}(*)]\circ t_{qi}(\alpha)\circ t_{ir}(\alpha_r)\tilde{\to}[\tilde{F}_i(\neq q,r)\circ t_{qi}(\alpha)]\circ t_{ir}(\alpha_r)\tilde{\to}\ldots\tilde{\to}$

$t_{ii^*}(\alpha_{i^*})\circ[t_{iq^*}(\alpha_{q^*})\circ t_{qi}(\alpha)]\circ\tilde{F}_i(\neq q,i^*,q^*)=t_{ii^*}(\alpha_{i^*})\circ[t_{qi}(\alpha)\circ t_{qq^*}(*)]\circ t_{iq^*}(\alpha_{q^*})\circ$

$\tilde{F}_i(\neq q,i^*,q^*)=[t_{ii^*}(\alpha_{i^*})\circ t_{qq^*}(*)]\circ t_{qi}(\alpha)\circ t_{iq^*}(\alpha_{q^*})\circ\tilde{F}_i(\neq q,i^*,q^*)=$

$t_{qq^*}(*)\circ[t_{ii^*}(\alpha_{i^*})\circ t_{qi}(\alpha)]\circ t_{iq^*}(\alpha_{q^*})\circ \tilde{F}_i(\neq q, i^*, q^*)\tilde{\to}$

$t_{qi}(\alpha)\circ t_{qq^*}(*)\circ t_{qi^*}(*)\circ t_{ii^*}(\alpha_{i^*})\circ t_{iq^*}(\alpha_{q^*})\circ \tilde{F}_i(\neq q, i^*, q^*)\tilde{\to}$

$t_{qi^*}(*)\circ t_{ii^*}(\alpha_{i^*})\circ t_{iq^*}(\alpha_{q^*})\circ \tilde{F}_i(\neq q, i^*, q^*) = [t_{iq^*}(*)\circ t_{ii^*}(\alpha_{i^*})]\circ t_{iq^*}(\alpha_{q^*})\circ \tilde{F}_i(\neq q, i^*, q^*) =$
$t_{ii^*}(\alpha_{i^*})\circ [t_{iq^*}(*)\circ t_{iq^*}(\alpha_{q^*})]\circ \tilde{F}_i(\neq q, i^*, q^*) = t_{ii^*}(\alpha_{i^*})\circ t_{iq^*}(*)\circ \tilde{F}_i(\neq q, i^*, q^*) = \tilde{F}_i(\neq q).$

§6. Строчные трансформационные преобразования

Этот пункт составляет один из ключевых моментов при доказательстве основного результата этой главы. Введем к рассмотрению следующие формы специального вида $f_i = F_i(\neq s)\circ(is) = \prod\limits_{q\in P_i\backslash\{s\}} t_{iq}(\alpha_q)\circ(is),$ где $1\le i\le mn,\ s\ge i$ и при $s=i^*$ дополнительно считается выполненным условие $\alpha_q\equiv 0$ при всех $q\in P_i\backslash\{i^*\}$. Ясно, что здесь при $s=i$ $F_i(\neq s)-$это обычная форма F_i. Введенные комбинации f_i мы будем называть *строчными формами* ступени i.

Теорема 1 (о строчной трансформации букв). *Пусть f_i-произвольная ненулевая строчная форма ступени $i, 1\le i\le mn,$ и x означает либо диагональную букву $d_k(\tau)$, либо же ненулевую квазитрансвекцию $\mathbf{t}_{rj}(\alpha)$, для которой считается выполненным условие $r\ge i$, как только $r<j$. Тогда для них применяя соотношения* 1−8 *и* 10−12*, можно выполнить преобразование*

$$V = f_i\circ x \overset{i}{\tilde{\to}} \tilde{f}_i, \qquad (\tilde{\to})$$

где $\tilde{f}_i-$также некоторая строчная форма ступени i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводимое ниже доказательство является комбинаторным и относительно слова $V = f_i\circ x = F_i(\neq s)\circ(is)\circ x$ различает следующие случаи.

$$I.\ \ x = d_k(\tau).$$

Если здесь $s=i,$ то преобразование $(\tilde{\to})$ применением 3 осуществляется как $V = F_i\circ x = x\circ \tilde{F}_i \tilde{\to} \tilde{F}_i$. При же $s>i$ используя (6) и только что разобранный случай $s=i,$ будем иметь $V = F_i(\neq s)\circ[(is)\circ x] = [F_i(\neq s)\circ x]\circ(is)\tilde{\to}\tilde{F}_i(\neq s)\circ(is) = \tilde{f}_i.$

$$II.\ \ x = \mathbf{t}_{rj}(\alpha),\ s=i.$$

Здесь рассматриваемое слово имеет вид $V = F_i \circ \boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)$ и для него возможны следующие случаи.

а) $r \notin P_i \cup \{i\}$. Покажем, что так может быть только при $j < i$ (j – второй индекс трансформируемой буквы $\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)$). Действительно, неравенство $j < i$ при $r < i$ следует из $j < r$ (последнее гарантируется условием теоремы). При же $r > i$ оно видно из $r \notin P_i \to mn < r < i^* \to j \le mn$ (ввиду естественности $\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)$) $\to r \ge j^*$ (ввиду естественности $\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)$ и $r > mn$) $\to j^* < i^*$ (ввиду $r < i^*$) $\to$ $j < i$ (это ввиду $i, j \le mn$).

Неравенство $j < i$ в свою очередь дает нам, что $\{i^*, q\} \cap \{r, j^*\} = \varnothing$ при любом $q \in P_i$. Применяя эту дизъюнктность и соотношения 6, требуемую форму в рассматриваемом случае мы получаем так $V = F_i(\ne q) \circ [t_{iq}(\alpha_q) \circ \boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)] = [F_i(\ne q) \circ \boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)] \circ t_{iq}(\alpha_q) = \ldots = \boldsymbol{t}_{rj}(\alpha) \circ F_i \tilde{\to} F_i$.

в) $r = i$. Если здесь $j < i$, то применяя лемму 2, имеем $V = F_i \circ \boldsymbol{t}_{ij}(\alpha) = \boldsymbol{t}_{ij}(\alpha) \circ F_i \tilde{\to} F_i$. Если же $j > i$, то лемма 2 и соотношение 4 дают нам $V = \tilde{F}_i(\ne j) \circ [t_{ij}(\alpha_j) \circ \boldsymbol{t}_{ij}(\alpha)] = \tilde{F}_i(\ne j) \circ t_{ij}(*) = \tilde{F}_i$.

В следующих ниже подпунктах будут разобраны возможные случаи, когда $r \in P_i$.

с) $i^* \ne r \in P_i$. Если здесь $j < i$, то используя лемму 2, разобранный только что п. в), соотношения 5, 6 и учитывая, что $j^* \notin P_i$, будем иметь

$$V = F_i(\ne r) \circ [t_{ir}(\alpha_r) \circ \boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)] = F_i(\ne r, q) \circ [t_{iq}(\alpha_q) \circ \boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)] \circ t_{ij}(*) \circ t_{ii^*}(*) \circ t_{ir}(\alpha_r) =$$

$$[F_i(\ne r, q) \circ \boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)] \circ t_{iq}(\alpha_q) \circ t_{ij}(*) \circ t_{ii^*}(*) \circ t_{ir}(\alpha_r) = \ldots =$$

$$\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha) \circ F_i(\ne r) \circ t_{ij}(*) \circ t_{ii^*}(*) \circ t_{ir}(\alpha_r) \tilde{\to} [F_i(\ne r) \circ t_{ij}(*)] \circ t_{ii^*}(*) \circ t_{ir}(\alpha_r) \tilde{\to}$$

$$[F_i(\ne r) \circ t_{ii^*}(*)] \circ t_{ir}(\alpha_r) = \tilde{F}_i(\ne r) \circ t_{ir}(\alpha_r) = \tilde{F}_i.$$

Пусть $j = i$. Сперва мы используя лемму 2, рассматриваемое слово представим в виде $V = F_i(\ne r) \circ t_{ir}(\alpha_r) \circ \boldsymbol{t}_{ri}(\alpha)$. Если здесь $\alpha_r \alpha \ne -e_i$, то применяя 8, лемму 4 и результат разобранного п. I, имеем $V = [F_i(\ne r) \circ d_i(*) \circ d_r(*)] \circ t_{ri}(*) \circ$

$t_{ir}(*)\tilde{\to}[\tilde{F}_i(\neq r)\circ t_{ri}(*)]\circ t_{ir}(*)\tilde{\to}\ \tilde{F}_i(\neq r)\circ t_{ir}(*)=\tilde{F}_i$. Случай, когда $\alpha_r\alpha\equiv -e_i$, при помощи 4 и леммы 4 также дает нам требуемый вид $V=[F_i(\neq r)\circ t_{ri}(-\alpha)]\circ$ $[t_{ri}(\alpha)\circ t_{ir}(\alpha_r)]\tilde{\to}\tilde{F}_i(\neq r)\circ(ir)=\tilde{f}_i$.

Пусть теперь $j>i$. Покажем сперва, что этот подслучай возможен только при условии $i^*\neq j\in P_i$. Действительно, если $j\le mn$, то $i<j\le mn\to j\in P_i\setminus\{i^*\}$. Пусть $j>mn$. А это ввиду естественности буквы $\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)$ может иметь место только при $r\le mn$ и $j\ge r^*$. Мы в то же время имеем и $r\in P_i\ \&\ r\le mn\to i<r\le mn$ $\to i^*<r^*$. А это означает, что $j\ge r^*\ \&\ r^*>i^*\to j>i^*$, т.е. включение $j\in P_i\setminus\{i^*\}$ верно и в этом случае. Применение лемм 2, 3, разобранного п. в) и соотношений 4 – 6, тогда, дает нам

$$V=\tilde{F}_i(\neq r)\circ[t_{ir}(\alpha_r)\circ\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)]=\tilde{F}_i(\neq r,j)\circ[t_{ij}(\alpha_j)\circ\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)]\circ t_{ij}(*)\circ t_{ii^*}(*)\circ t_{ir}(\alpha_r)=$$

$$[\tilde{F}_i(\neq r,j)\circ\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)]\circ[t_{ij}(\alpha_j)\circ t_{ij}(*)]\circ t_{ii^*}(*)\circ t_{ir}(\alpha_r)\tilde{\to}[\tilde{F}_i(\neq r,j)\circ t_{ij}(*)]\circ t_{ii^*}(*)\circ$$

$$t_{ir}(\alpha_r)=[\tilde{F}_i(\neq r)\circ t_{ii^*}(*)]\circ t_{ir}(\alpha_r)=\tilde{F}_i(\neq r)\circ t_{ir}(\alpha_r)=\tilde{F}_i.$$

d) $r=i^*$. Этот подслучай возможен только при $j\le i$. Действительно, естественность $\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)\to\ r=i^*>mn\to j\le mn\,\&\,r\ge j^*\to\ j\le mn\ \&\,i^*\ge j^*\to i\ge j$.

Разберем сперва случай $j<i$. Считая $i^*\neq q\in P_i$ и применяя 5 – 7, а также результаты уже разобранного п.с) (случай $j<i$), здесь мы имеем

$$V=F_i(\neq i^*)\circ[t_{ii^*}(\alpha_{i^*})\circ\ \boldsymbol{t}_{i^*j}(\alpha)]=F_i(\neq i^*)\circ[\ \boldsymbol{t}_{i^*j}(\alpha)\circ\ t_{j^*j}(*)]\circ t_{ij}(*)\circ t_{ii^*}(\alpha_{i^*})=$$

$$[F_i(\neq i^*)\circ\ \boldsymbol{t}_{j^*j}(*)]\circ\ \boldsymbol{t}_{i^*j}(\alpha)\circ t_{ij}(*)\circ t_{ii^*}(\alpha_{i^*})\tilde{\to}\tilde{F}_i(\neq i^*,q)\circ\ t_{iq}(\alpha_q)\circ\ \boldsymbol{t}_{i^*j}(\alpha)\circ t_{ij}(*)\circ$$

$$t_{ii^*}(\alpha_{i^*})=\tilde{F}_i(\neq i^*,q)\circ[\ t_{q^*i^*}(\varepsilon_{iq}\alpha_q)\circ\ \boldsymbol{t}_{i^*q}(\alpha)]\circ t_{ij}(*)\circ t_{ii^*}(\alpha_{i^*})=\tilde{F}(\neq i^*,q)\circ$$

$$[\boldsymbol{t}_{i^*j}(\alpha)\circ t_{q^*j}(*)]\circ t_{q^*i^*}(\varepsilon_{iq}\alpha_q)\circ t_{ij}(*)\circ t_{ii^*}(\alpha_{i^*})=[\tilde{F}_i(\neq i^*,q)\circ\ \boldsymbol{t}_{q^*j}(*)]\circ\ \boldsymbol{t}_{i^*j}(\alpha)\circ$$

$$t_{iq}(\alpha_q)\circ t_{ij}(*)\circ\ t_{ii^*}(\alpha_{i^*})\tilde{\to}[\tilde{F}_i(\neq i^*,q)\circ\ \boldsymbol{t}_{i^*j}(\alpha)]\circ t_{iq}(\alpha_q)\circ t_{ij}(*)\circ t_{ii^*}(\alpha_{i^*})\tilde{\to}\dots\tilde{\to}$$

$$\boldsymbol{t}_{i^*j}(\alpha)\circ[\tilde{F}_i(\neq i^*)\circ t_{ij}(*)]\circ t_{ii^*}(\alpha_{i^*})\tilde{\to}t_{ij}(*)\circ\ \tilde{F}_i(\neq i^*)\circ t_{ii^*}(\alpha_{i^*})\tilde{\to}\tilde{F}_i.$$

Случай же $j=i$ является “капризным” и требует глубокого индукционно-комбинаторного рассмотрения. Номер $q,\ q \neq i^*$, формы $F_i = \prod_{q \in P_i} t_{iq}(\alpha_q)$ назовем *радикальным,* если для него $\alpha_q \equiv 0$, в противном случае он называется *нерадикальным* номером этой формы. Далее радикальность номера q в F_i будет подчеркиваться как $F_i(\equiv q)$. Ниже под $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}(F_i)$ будет обозначено число нерадикальных индексов формы F_i (т.е. ее “нерадикальная” длина). Наши дальнейшие рассуждения для нерадикальных индексов $p, s,\ p \neq s$, из F_i используют преобразования

$$F_i(\neq p)\circ(ip) \tilde{\rightarrow} F_i(\neq s)\circ(is). \qquad (p \to s)$$

Справедливость $(p \to s)$ применением 11, 7, лемм 2 – 4 и результатов разобранных пп. I, II в), II c) (случай $j>i$) очень просто следует из

$$F_i(\neq p)\circ(ip) = F_i(\neq p,s)\circ[t_{is}(\alpha_s)\circ(ip)] = [F_i(\neq p,s)\circ d_i(*)\circ t_{si}(*)\circ \boldsymbol{t}_{pi}(*)\circ d_s(*)\circ$$

$$t_{ps}(*)\circ d_p(*)\circ t_{sp}(*)\circ t_{ps}(*)\circ \boldsymbol{t}_{ip}(*)]\circ(is) \tilde{\rightarrow} F_i(\neq s)\circ(is)$$

(в этих вычислениях в случае неестественной $t_{ps}(*)$ она заменена с $\boldsymbol{t}_{s^*p^*}(*)$ при помощи 7 и так же обстояло дело с сомножителем $t_{sp}(*)$).

Справедливость теоремы в этом пункте мы установим в форме

$$V = F_i \circ t_{i^*i}(\alpha) \tilde{\rightarrow} \tilde{F}_i(\neq s)\circ\begin{bmatrix} t_{is}(*) \\ (is) \end{bmatrix},\quad s \in P_i, \qquad (\neq s)$$

где во втором случае $s=i^* \to \boldsymbol{m}=0$, а при $\boldsymbol{m} \geq 1$ s может быть любым из нерадикальных номеров формы F_i. Как показывает $(p \to s)$, во втором случае и при $\boldsymbol{m} \geq 1$ преобразование $(\neq s)$ нам достаточно показать для какого-нибудь одного (не важно какого) нерадикального номера s. Учитывая сказанное, покажем мы $(\neq s)$ индукцией по нерадикальной длине $\boldsymbol{m}$ формы F_i.

Рассмотрим сначала базовый случай $\boldsymbol{m}=0$. Используя лемму 2, представим рассматриваемое слово в виде

$$V = F_i(\neq i^*)\circ[t_{ii^*}(\alpha_{i^*})\circ t_{i^*i}(\alpha)]. \qquad (\neq i^*)$$

Пусть для номера $r \in P_i \setminus \{i^*\}$ V_r обозначает некоторое слово вида $t_{r^*i}(\cdot)\circ$ $t_{r^*r}(\cdot)\circ t_{ir}(\cdot)$. Если в $(\neq i^*)$ $\alpha_{i^*}\alpha \not\equiv -e_i$, то применяя (4), 8, 7 и результата п. I, будем иметь

$$V \overset{\sim}{\to} \tilde{F}_i(\neq i^*, k)\circ[t_{ik}(\alpha_k)\circ t_{i^*i}(*)]\circ\ t_{ii^*}(*) = \tilde{F}_i(\neq i^*, k)\circ t_{i^*i}(*)\circ t_{i^*k}(\cdot)\circ t_{k^*k}(\cdot)\circ t_{ik}(\cdot)\circ$$

$$t_{ii^*}(*) = \tilde{F}_i(\neq i^*, k)\circ t_{i^*i}(*)\circ[t_{k^*i}(\cdot)\circ t_{k^*k}(\cdot)\circ t_{ik}(\cdot)]\circ t_{ii^*}(*) = [\tilde{F}_i(\neq i^*, k)\circ t_{i^*i}(*)]\circ V_k\circ$$

$$t_{ii^*}(*) = \ldots = t_{i^*i}(*)\circ V_p\circ V_q\circ\ldots\circ V_k\circ t_{ii^*}(*).$$

Теперь отправляясь от формы $\tilde{F}_i = t_{ip}(\cdot)$ и используя определение $\overset{i}{\underset{\sim}{\to}}$, а также результаты пп. II b), c), приходим к $V \overset{\sim}{\to} [\tilde{F}_i\circ V_q\circ\ldots\circ V_k]\circ t_{ii^*}(*) \overset{\sim}{\to} \tilde{F}_i\circ t_{ii^*}(*) =$ $\tilde{F}_i(\neq i^*)\circ t_{ii^*}(*)$, т.е. имеем одну из требуемых форм. Если же в $(\neq i^*)$ $\alpha_{i^*}\alpha \equiv -e_i$, то мы уже находимся в требуемом виде $V \overset{\sim}{\to} \tilde{F}_i(\neq i^*)\circ(ii^*)$. Итак, база индукции имеет место.

Пусть теперь $\boldsymbol{m} \geq 1$ и для (нерадикальных) длин < $\boldsymbol{m}$ преобразования ($\neq s$) имеют место. Покажем их правильность для $\boldsymbol{m}$. Возьмем какой-нибудь нерадикальный номер q из F_i. Применение леммы 2, соотношений (4), 7 и предположения индукции дает нам

$$V = F_i(\neq q)\circ[t_{iq}(\alpha_q)\circ t_{i^*i}(\alpha)] = [F_i \neq q)\circ t_{i^*i}(\alpha)]\circ t_{i^*q}(*)\circ t_{q^*q}(*)\circ t_{iq}(\alpha_q) \overset{\sim}{\to}$$

$$\tilde{F}_i(\neq q,s)\circ\begin{bmatrix} t_{is}(*) \\ (is) \end{bmatrix}\circ t_{q^*i}(\beta)\circ t_{q^*q}(*)\circ t_{iq}(\alpha_q),\ s \in P_i \setminus \{q\}. \qquad (\neq q,s)$$

Разберем сначала в $(\neq q,s)$ первый случай. Здесь применяя лемму 2, будем иметь $V \overset{\sim}{\to} \tilde{F}_i(\neq q,\ q^*)\circ[t_{iq^*}(\alpha_{q^*})\circ t_{q^*i}(\beta)]\circ t_{q^*q}(*)\circ t_{iq}(\alpha_q)$. Если в полученной записи $\alpha_{q^*}\beta \not\equiv -e_i$, то используя 8, а также результаты пп. I, II c) (случай $j > i$) ,II b), преобразования можно завершить так $V \overset{\sim}{\to} [\tilde{F}_i(\neq q,\ q^*)\circ$ $\boldsymbol{t}_{q^*i}(*)\circ t_{iq*}(*)\circ$ $t_{q^*q}(*)\circ t_{iq}(\alpha_q) \overset{\sim}{\to} \tilde{F}_i\circ t_{iq}(\alpha_q) = \tilde{F}_i(\neq q)\circ t_{iq}(*)$. Если же там $\alpha_{q^*}\beta \equiv -e_i$, то соотношения (13), (9) и результаты пп. II b), II c) (случай $j > i$) приведут нас к

$$V \overset{i}{\tilde{\to}} \tilde{F}_i(\neq q,\, q^*)\circ [(iq^*)\circ t_{q^*q}(*)]\circ t_{iq}(\alpha_q) = [\ \tilde{F}_i(\neq q,\, q^*)\circ \boldsymbol{t}_{q^*q}(*)\circ t_{ii^*}(*)\circ t_{iq}(*)]\circ$$

$$[(iq^*)\circ t_{iq}(\alpha)] \tilde{\to} [\tilde{F}_i(\neq q^*)\circ t_{iq}(*)\circ t_{ii^*}(\cdot)\circ t_{q^*q}(*)]\circ (iq^*) \tilde{\to} \tilde{F}_i(\neq q^*)\circ (iq^*).$$

Переходим теперь к разбору в ($\neq q, s$) второго случая, т.е.

$$V \tilde{\to} \tilde{F}_i(\neq q, s)\circ (is)\circ t_{q^*i}(\beta)\circ t_{q^*q}(*)\circ t_{iq}(\alpha_q). \qquad (is)$$

Здесь различаются следующие подслучаи.

$\alpha)$ $s = i^*$ ($\to \boldsymbol{m}(\tilde{F}_i(\neq q, s)) = 0$). Применяя соотношения (19), 7, 6, 4, (11), (4), лемму 2, а также результаты пп. II b), II c) (случаи $j \geq i$), здесь выполняем следующие преобразования

$$V \tilde{\to} \tilde{F}_i(\neq q, i^*)\circ [(ii^*)\circ t_{q^*i}(\beta)]\circ t_{q^*q}(*)\circ t_{iq}(\alpha_q) = [\tilde{F}_i(\neq q, i^*)\circ \boldsymbol{t}_{q^*i}(\beta)\circ t_{q^*q}(*)]\circ$$

$$t_{q^*i^*}(*)\circ [(ii^*)\circ t_{q^*q}(*)]\circ t_{iq}(\alpha_q) \tilde{\to} [\tilde{F}_i(\neq i^*, \equiv q)\circ t_{ii^*}(\cdot)\boldsymbol{t}_{iq}(*)\circ t_{q^*q}(*)]\circ [(ii^*)\circ t_{iq}(\alpha_q)]$$

$$\tilde{\to} [\tilde{F}_i(\neq i^*)\circ t_{ii^*}(\cdot)\circ t_{iq}(\cdot)\circ t_{q^*q}(\cdot)]\circ t_{i^*q}(*)\circ (ii^*) \tilde{\to} [\tilde{F}_i(\neq i^*, \equiv q^*)\circ t_{ii^*}(\cdot)\circ \boldsymbol{t}_{q^*i}(*)]\circ (ii^*)$$

$$\tilde{\to} \tilde{F}_i(\neq i^*)\circ [t_{ii^*}(\cdot)\circ t_{ii^*}(\chi)]\circ t_{i*i}(\pi) = \tilde{F}_i(\neq i^*)\circ [t_{ii^*}(\overset{\frown}{\chi})\circ t_{i^*i}(\pi)] = \tilde{F}_i(\neq i^*)\circ (ii^*).$$

Крайние члены полученной цепочки показывают (это легко усмотреть из определения $\overset{i}{\tilde{\to}}$), что слова V и $W = \tilde{F}_i(\neq i^*,\, q)\circ t_{iq}(\gamma)\circ (i i^*)$ имеют сравнимые по модулю J $i-$ые строки, в частности, должны быть равны и их нерадикальные длины. Но так может быть только при $\gamma \not\equiv 0$ (ибо в противном случае слово W имело бы нерадикальную длину 0, что противоречит с $\boldsymbol{m} \geq 1$). Поэтому применение к выделенному отрезку в последнем члене цепочки соотношения 10, результатов пп. I, II b), c), леммы 2, а также установленного базового случая $\boldsymbol{m} = 0$, здесь к требуемому виду нас приводит так

$$V \tilde{\to} [\tilde{F}_i(\neq i^*, \equiv q)\circ d_i(*)\circ\ \boldsymbol{t}_{q^*i}(*)\circ\ \boldsymbol{t}_{qi}(*)\circ\ \boldsymbol{t}_{i^*i}(*)\circ\ d_q(*)\circ\ \boldsymbol{t}_{q^*q}(*)\circ\ \boldsymbol{t}_{qq^*}(*)\circ\ \boldsymbol{t}_{q^*q}(*)\circ\ \boldsymbol{t}$$

$$_{ii^*}(*)\circ\ \boldsymbol{t}_{iq^*}(*)]\circ (iq) \tilde{\to} \tilde{F}_i(\equiv q)\circ (iq) = [\tilde{F}_i(\equiv q)\circ t_{iq}(\chi)]\circ t_{qi}(\pi) = \tilde{F}_i(\neq q)\circ$$

$$[t_{iq}(\overset{\frown}{\chi})\circ t_{qi}(\pi)] = \tilde{F}_i(\neq q)\circ (iq).$$

$\beta)$ $s = q^*$. Здесь слово (is) с помощью 4 приводится к виду

$V \tilde{\rightarrow} \tilde{F}_i(\neq q,\, q^*) \circ (iq^*) \circ t_{q^*i}(\beta) \circ t_{q^*q}(*) \circ t_{iq}(\alpha_q) = \tilde{F}_i(\neq q,\, q^*) \circ t_{iq^*}(\chi) \circ [t_{q^*i}(\pi) \circ$
$t_{q^*i}(\beta)] \circ t_{q^*q}(*) \circ t_{iq}(\alpha_q) = \tilde{F}_i(\neq q,\, q^*) \circ [t_{iq^*}(\chi) \circ t_{q^*i}(\pi+\beta)] \circ t_{q^*q}(*) \circ t_{iq}(\alpha_q).$

Если в полученной записи $\beta \equiv 0$ (напомним, что $\chi\pi \equiv -e_i$), то применение (13), (9) и результатов пп. II b), c), а также леммы 3 дает нам

$V \tilde{\rightarrow} \tilde{F}_i(\neq q,\, q^*) \circ [(iq^*) \circ t_{q^*q}(*)] \circ t_{iq}(\alpha_q) = [\, \tilde{F}_i(\neq q,\, q^*) \circ t_{q^*q}(*) \circ t_{ii^*}(*) \circ t_{iq}(*)] \circ$

$[(iq^*) \circ t_{iq}(\alpha_q)] \tilde{\rightarrow} [\tilde{F}_i(\neq q^*) \circ \boldsymbol{t}_{iq}(*) \circ \boldsymbol{t}_{ii^*}(\cdot) \circ \boldsymbol{t}_{q^*q}(*)] \circ (iq^*) \tilde{\rightarrow} \tilde{F}_i(\neq q^*) \circ (iq^*),$

что также является одной из требуемых форм.

Если же $\beta \not\equiv 0$, то применяя (к выделенному отрезку) соотношения 8 и результатов пп. I, II b), II c) (случай $j > i$), нужную форму получаем так

$V \tilde{\rightarrow} [\tilde{F}_i(\neq q,\, q^*) \circ \boldsymbol{t}_{q^*i}(*)] \circ t_{iq^*}(*) \circ t_{q^*q}(*) \circ t_{iq}(\alpha_q) \tilde{\rightarrow} \tilde{F}_i(\neq q^*) \circ t_{iq^*}(*) \circ t_{q^*q}(*) \circ$

$t_{iq}(\alpha_q) \tilde{\rightarrow} \tilde{F}_i \circ t_{iq}(\alpha_q) = \tilde{F}_i.$

$\gamma)$ $s \neq i^*,\, q^*$. В этом случае применяя (20), 5 – 7, (12), лемму 2 и результаты пп. II c) (случай $j > i$), II b), можно выполнить следующие преобразования

$V \tilde{\rightarrow} \tilde{F}_i(\neq q, s) \circ [(is) \circ t_{q^*i}(\beta)] \circ t_{q^*q}(*) \circ t_{iq}(\alpha_q) = \tilde{F}_i(\neq q, s) \circ [t_{q^*i}(\beta) \circ t_{q^*s}(*)] \circ$

$[(is) \circ t_{q^*q}(*)] \circ t_{iq}(\alpha_q) = [\tilde{F}_i(\neq q, s) \circ t_{q^*s}(*)] \circ [t_{q^*i}(\beta) \circ t_{q^*q}(*)] \circ [(is) \circ t_{iq}(\alpha_q)] \tilde{\rightarrow}$

$[\tilde{F}_i \circ \boldsymbol{t}_{q*q}(*)] \circ [t_{q*i}(\beta) \circ t_{iq}(\cdot) \circ t_{sq}(*)] \circ (is) \tilde{\rightarrow} [\tilde{F}_i \circ t_{sq}(*)] \circ [t_{q*i}(\beta) \circ t_{iq}(\cdot)] \circ (is) \tilde{\rightarrow}$

$[\tilde{F}_i \circ t_{iq}(\cdot) \circ t_{q*q}(\cdot)] \circ t_{q*i}(\beta) \circ (is) \tilde{\rightarrow} \tilde{F}_i \circ t_{q*i}(\beta) \circ (is) =$

$$\tilde{F}_i(\neq q^*) \circ [t_{iq*}(\gamma) \circ t_{q*i}(\beta)] \circ (is). \qquad (\neq q^*)$$

Если в полученной записи $\gamma\beta \not\equiv -e_i$, то применение (к выделенному отрезку) соотношений 8, 4, лемм 2, 4 и результата п. I приводит нас к

$V \tilde{\rightarrow} [\tilde{F}_i(\neq q^*) \circ d_i(*) \circ d_{q*}(*) \circ \boldsymbol{t}_{q*i}(*)] \circ t_{iq*}(*) \circ (is) \tilde{\rightarrow} \tilde{F}_i(\neq q^*) \circ t_{iq*}(*) \circ (is) = \tilde{F}_i(\neq s) \circ$

$[t_{is}(\delta) \circ t_{is}(\chi)] \circ t_{si}(\pi) = \tilde{F}_i(\neq s) \circ t_{is}(\delta+\chi) \circ t_{si}(\pi).$

Это слово при $\delta \equiv 0$ дает нам $V \xrightarrow{\sim} \widetilde{F}_i(\neq s)\circ(is)$. При $\delta \not\equiv 0$ используя 8, лемму 4 и результат п. I, мы снова приходим к требуемому виду $V \xrightarrow{\sim} [\widetilde{F}_i(\neq s)\circ \boldsymbol{t}_{si}(*)]\circ t_{is}(*) \xrightarrow{\sim} \widetilde{F}_i(\neq s)\circ t_{is}(*)$.

Пусть теперь в $(\neq q^*)$ $\gamma\beta \equiv -e_i$. Если при этом $s-$нерадикальный номер в $\widetilde{F}_i(\neq q^*)$, то применение преобразования ($p \to s$), (7), 4, 8 и результатов пп.I, II c) (случай $j = i$) дает нам

$$V \xrightarrow{\sim} [\widetilde{F}_i(\neq q^*)\circ(iq^*)]\circ(is) \xrightarrow{\sim} \widetilde{F}_i(\neq s)\circ(is)\circ(is) = \widetilde{F}_i(\neq s)\circ[(is)\circ t_{is}(\chi)]\circ t_{si}(\pi) \xrightarrow{\sim}$$

$$[\widetilde{F}_i(\neq s)\circ t_{si}(*)]\circ(is)\circ t_{si}(\pi) \xrightarrow{\sim} \widetilde{F}_i(\neq s)\circ t_{is}(\alpha)\circ[t_{si}(\beta)\circ t_{si}(\pi)] = \widetilde{F}_i(\neq s)\circ$$

$$[t_{is}(\alpha)\circ t_{si}(\beta+\pi)] \xrightarrow{\sim} [\widetilde{F}_i(\neq s)\circ \boldsymbol{t}_{si}(*)]\circ t_{is}(*) \xrightarrow{\sim} \widetilde{F}_i(\neq s)\circ t_{is}(*)$$

(в этих вычислениях $\alpha\beta \equiv -e_i$).

В случае, когда в $\widetilde{F}_i(\neq q^*)$ $s-$номер радикальный, используя соотношения (12), (20), 4, лемму 2 и результаты пп. II в), II c), (случаи $j \geq i$), находим (ниже также $\alpha\beta \equiv -e_i$)

$$V \xrightarrow{\sim} \widetilde{F}_i(\neq q^*, \equiv s)\circ[(iq^*)\circ t_{is}(\alpha)]\circ t_{si}(\beta) = [\widetilde{F}_i(\neq q^*, \equiv s)\circ t_{is}(\cdot)\circ t_{q*s}(*)]\circ[(iq^*)\circ t_{si}(\beta)]$$

$$\xrightarrow{\sim} [\widetilde{F}_i(\neq q^*, \equiv s)\circ \boldsymbol{t}_{si}(\beta)\circ t_{sq*}(*)]\circ(iq^*) \xrightarrow{\sim} \widetilde{F}_i(\equiv q^*)\circ(iq^*) = \widetilde{F}_i(\neq q^*)\circ[t_{iq*}(\cdot)\circ t_{iq*}(\alpha)]$$

$$\circ t_{q*i}(\beta) = \widetilde{F}_i(\neq q^*)\circ[t_{iq*}(\overbrace{\alpha})\circ t_{q*i}(\beta)] = \widetilde{F}_i(\neq q^*)\circ(iq^*).$$

Проведенными рассуждениями п. d) также полностью разобран.

$$III.\ x = \boldsymbol{t}_{rj}(\alpha),\ s > i.$$

Этот пункт существенно опирается на результаты разобранных пп. I и II.

а) $r \notin P_i \cup \{i\}$. Здесь неравенство $j < i$ (оно показано в п. II а)) влечет за собой $\{i, s\}\cap\{r, j, r^*, j^*\} = \varnothing$. Применение соотношения (23) и результата п.II а) теперь дает нам $V = F_i(\neq s)\circ[(is)\circ \boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)] = [F_i(\neq s)\circ \boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)]\circ(is) \xrightarrow{\sim} F_i(\neq s)\circ(is)$.

в) $r = i$. Здесь рассматриваемое слово имеет вид

$$V = F_i(\neq s)\circ(is)\circ \boldsymbol{t}_{ij}(\alpha). \qquad (j)$$

Если в (j) $j=s$, то применением (7) и результатов п. I оно приводится к виду $V=F(\neq s)\circ[(is)\circ \boldsymbol{t}_{is}(\alpha)] \xrightarrow{\sim} \tilde{F}_i(\neq s)\circ t_{si}(*)\circ(is)$. Если в полученной записи $s\neq i^*$, то лемма 4 дает нам $V \xrightarrow{\sim} [F_i(\neq s)\circ t_{si}(*)]\circ(is) \xrightarrow{\sim} \tilde{F}_i(\neq s)\circ(is)$. Если же $s=i^*$, то используя (7), 4, а также результаты пп. I, II d), мы приходим к

$$V=F_i(\neq i^*)\circ[(ii^*)\circ \boldsymbol{t}_{ii^*}(\alpha)] \xrightarrow{\sim} [\tilde{F}_i(\neq i^*)\circ t_{i^*i}(*)]\circ(ii^*) \xrightarrow{\sim} \tilde{F}_i\circ(ii^*)= \tilde{F}_i(\neq i^*)\circ$$

$$[t_{ii^*}(\cdot)\circ t_{ii^*}(\chi)]\circ t_{i^*i}(\pi)=\tilde{F}_i(\neq i^*)\circ[t_{ii^*}(\overset{\frown}{\chi})\circ t_{i^*i}(\pi)] = \tilde{F}_i(\neq i^*)\circ(ii^*).$$

Пусть в (j) $j=s^*(\rightarrow s\neq i^*)$. Здесь мы используя (9) и результаты пп. II в), II c) (случай $j>i$), к требуемому виду приходим так $V=F_i(\neq s)\circ[(is)\circ \boldsymbol{t}_{is^*}(\alpha)]=$
$[F_i(\neq s)\circ \boldsymbol{t}_{is^*}(*)\circ \boldsymbol{t}_{ii^*}(\cdot)\circ \boldsymbol{t}_{ss^*}(*)]\circ(is) \xrightarrow{\sim} \tilde{F}_i(\neq s)\circ(is)$.

Если в (j) $j=i^*(\rightarrow s\neq i^*)$, то мы применяя (10) и результаты пп. II в), c), аналогичным образом будем иметь $V=F_i(\neq s)\circ[(is)\circ \boldsymbol{t}_{ii^*}(\alpha)]=[\tilde{F}_i(\neq s)\circ \boldsymbol{t}_{is^*}(\cdot)\circ$
$\boldsymbol{t}_{ss^*}(*)\circ \boldsymbol{t}_{ii^*}(\cdot)]\circ(is) \xrightarrow{\sim} \tilde{F}_i(\neq s)\circ(is)$.

Пусть теперь в (j) $j\notin\{s, s^*, i^*\}$. Поскольку здесь $j>i\rightarrow j\in P_i$ (ввиду естественности $\boldsymbol{t}_{ij}(\alpha)$ и $j<i\rightarrow i\leq mn<j^*$, этот случай возможен только при $j^*>i$. Если в рассматриваемом случае $s\neq i^*$, то применяя (12) (при неестесвенных $t_{sj}(*)$ и 7) и результаты пп. II b), c), будем иметь $V=F_i(\neq s)\circ[(is)\circ \boldsymbol{t}_{ij}(\alpha)]=[\tilde{F}_i(\neq s)\circ \boldsymbol{t}_{ij}(\cdot)\circ t_{sj}(*)]\circ(is) \xrightarrow{\sim} \tilde{F}_i(\neq s)\circ(is)$.
Если здесь $s=i^*$ $(\rightarrow \boldsymbol{m}(F_i(\neq i^*))=0)$, то используя (11) (при неестественных t_{i^*j} $(*)$ также 7) и результаты пп. II a)–c), к требуемой формы мы приходим так $V=F_i(\neq i^*)\circ[(ii^*)\circ \boldsymbol{t}_{ij}(\alpha)]=[F_i(\neq i^*)\circ \boldsymbol{t}_{ij}(\cdot)\circ \boldsymbol{t}_{j^*j}(\cdot)\circ t_{i^*j}(*)]\circ(ii^*) \xrightarrow{\sim} \tilde{F}_i(\neq i^*)\circ(ii^*)$.

Переходим к разбору случаев $r\in P_i$ $(\rightarrow r>i)$.

c) $r=s$. Если здесь $j=i$, то применением (8) и результата п. I рассматриваемое слово приводится к виду $V=F_i(\neq s)\circ[(is)\circ \boldsymbol{t}_{si}(\alpha)] \xrightarrow{\sim} F_i(\neq s)\circ$
$\begin{bmatrix} t_{si}(*)\circ t_{is}(*) \\ (is) \end{bmatrix}$. В первом случае используя результаты пп. II b)–d), будем

иметь $V \tilde{\to} [\tilde{F}_i(\neq s) \circ \ \boldsymbol{t}_{si}(*)] \circ t_{is}(*) \tilde{\to} \tilde{F}_i \circ \boldsymbol{t}_{is} \ (*) \tilde{\to} \tilde{F}_i$. А второй случай уже сам находится в требуемой форме.

Пусть $j = s^*(\to s \neq i^*)$. Здесь мы применяя (13) и результаты пп. II c), b), имеем $V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ \ \boldsymbol{t}_{ss^*}(\alpha)] = [F_i(\neq s) \circ \boldsymbol{t}_{ss^*}(\alpha) \circ \boldsymbol{t}_{ii^*}(*) \circ \boldsymbol{t}_{is^*}(*)] \circ (is) \tilde{\to}$ $\tilde{F}_i(\neq s) \circ (is)$.

При $j = i^*$ применение (14) и результатов пп. II b), c) приведет нас к $V =$ $F_i(\neq s) \circ [(is) \circ \ \boldsymbol{t}_{si^*}(\alpha)] = [F_i(\neq s) \circ \ \boldsymbol{t}_{si^*}(*) \circ \boldsymbol{t}_{ss^*}(*) \circ \ \boldsymbol{t}_{ii^*}(*)] \circ (is) \tilde{\to} \tilde{F}_i(\neq s) \circ (is)$.

Пусть $j \notin \{i, s^*, i^*\}$. Если здесь $s \neq i^*$, то (16) и результаты пп. II c), b) дают нам $V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ \ \ \boldsymbol{t}_{sj}(\alpha)] = [F_i(\neq s) \circ \ \ \boldsymbol{t}_{sj}(\alpha) \circ t_{ij}(*)] \circ (is) \tilde{\to} \tilde{F}_i(\neq s) \circ (is)$. Если же $s = i^*$, то мы используя (15) и результаты пп. II b) – d), требуемую форму получаем как

$V = F_i(\neq i^*) \circ [(ii^*) \circ \ \boldsymbol{t}_{i^*j}(\alpha)] = [F_i(\neq i^*) \circ \ \boldsymbol{t}_{i^*j}(\alpha) \circ \ \boldsymbol{t}_{j^*j}(*) \circ \boldsymbol{t}_{ij}(*)] \circ (ii^*) \tilde{\to} \tilde{F}_i(\neq i^*) \circ$ $t_{ii^*}(\cdot) \circ (ii^*) = \tilde{F}_i(\neq i^*) \circ (ii^*)$.

d) $r = s^*(\to r \neq i, i^*)$. Разберем сначала подслучай $j = i$. Если здесь s^* – нерадикальный номер в $F_i(\neq s)$, то применяя преобразование ($p \to s$) и результат п. III c) (случай $j = i$), к требуемой форме мы приходим так $V = [F_i(\neq s) \circ (is)] \circ t_{s^*i}(\alpha) \tilde{\to} \tilde{F}_i(\neq s^*) \circ (is^*) \circ \ \ \boldsymbol{t}_{s*i}(\alpha) \tilde{\to} \tilde{f}_i$. Если же s^* – номер радикальный, то применение (17) и результатов пп. II c) (случаи $j \geq i$), II d) рассматриваемое слово приводит к виду $V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ t_{s^*i}(\alpha)] = [\ F_i(\neq s) \circ \ \boldsymbol{t}$ $_{s*i}(*) \circ \boldsymbol{t}_{s*s}(\cdot)] \circ \ t_{i^*i}(*) \circ (is) \tilde{\to} [\ \tilde{F}_i \circ \boldsymbol{t}_{i*i}(*)] \circ (is) \tilde{\to}$

$$\tilde{F}_i(\neq p) \circ \begin{bmatrix} t_{ip}(*) \\ (ip) \end{bmatrix} \circ (is), \qquad\qquad (p)$$

где p – некоторый номер из P_i.

Теперь первый случай в (p) применением результатов пп. II b) и II c) (случай $j = i$) к требуемому виду приводит нас так $V \tilde{\to} \tilde{F}_i \circ (is) = [\tilde{F}_i \circ \boldsymbol{t}_{is}(\chi)] \circ$ $t_{si}(\pi) = \tilde{F}_i \circ \boldsymbol{t}_{si}(\pi) \tilde{\to} \tilde{f}_i$. Если во втором случае $p \neq i^*$, то приводимость такого слова (p) к виду $\widetilde{f}_i$ нами показана в подпункте $\gamma)$ п. II d) (см. случай $\gamma\beta \equiv -e_i$). Пусть в (p) имеет место второй случай и пусть там $p = i^*$. Тогда применяя соотношения (11), 7, (19) и результаты пп. II b), II c) (случай $j > i$), II d), к нужной форме мы приходим так

$$V \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq i^*) \circ [(ii^*) \circ t_{is}(\chi)] \circ t_{si}(\pi) = [\widetilde{F}_i(\neq i^*) \circ \boldsymbol{t}_{is}(\cdot) \circ$$

$$\boldsymbol{t}_{s^*s}(\cdot)] \circ t_{i^*s}(*) \circ [(ii^*) \circ t_{si}(\pi)] \tilde{\to} [\widetilde{F}_i(\neq i^*) \circ t_{ii^*}(\cdot) \circ \boldsymbol{t}_{s^*i}(*) \circ \boldsymbol{t}_{si}(\pi) \circ$$

$$\boldsymbol{t}_{ss^*}(*)] \circ t_{si^*}(*) \circ (ii^*) \tilde{\to} [\ \widetilde{F}_i(\neq i^*) \circ t_{ii^*}(\cdot) \circ \ \boldsymbol{t}_{is^*}(*) \circ$$

$$\boldsymbol{t}_{ii^*}(\alpha)] \circ t_{i^*i}(\beta) = \widetilde{F}_i(\neq i^*) \circ t_{ii^*}(\cdot) \circ \ \boldsymbol{t}_{i^*i}(\beta) \tilde{\to} \widetilde{f}_i.$$

Переходим к разбору случая $j = s$ ($\to s \neq i^*$, ибо противный случай даст слово, разобранное в п. III b)). Применением (21), 6 и результатов пп. II c), II d) (случай $j = i$) рассматриваемое слово примет форму

$$V = \widetilde{F}_i(\neq s) \circ [(is) \circ \ \boldsymbol{t}_{s^*s}(\alpha)] = \widetilde{F}_i(\neq s) \circ [\ t_{i^*i}(*) \circ t_{s^*i}(\cdot) \circ t_{s^*s}(\cdot)] \circ (is) = [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ \ \boldsymbol{t}_{s^*i}(\cdot) \circ$$

$$\boldsymbol{t}_{s^*s}(\cdot)] \circ t_{i^*i}(*) \circ (is) \tilde{\to} [\widetilde{F}_i \circ \ \boldsymbol{t}_{i^*i}(*)] \circ (is).$$

Приводимость такого слова к виду $\widetilde{f}_i$ нами подробно показана в случае $j = i$ настоящего пункта.

Подслучай $j = i^*$ в рассматриваемом пункте невозможен (ибо запись $t_{s^*i^*}(\alpha)$ не является естественной).

Прочие же случаи $j \neq i, s, i^*$ (напомним, что $s \neq i^*, j^*$) разбираются так. Здесь мы используя (4), 5−7, (ε_{ij}) и результат п. II c), получаем

$$V = F_i(\neq s) \circ (is) \circ \ \boldsymbol{t}_{s^*j}(\alpha) = F_i(\neq s) \circ t_{is}(\chi) \circ [t_{si}(\pi) \circ t_{j^*s}(-\varepsilon_{sj}\alpha)] = F_i(\neq s) \circ t_{is}(\chi) \circ$$

$$t_{j^*s}(-\varepsilon_{sj}\alpha) \circ t_{j^*i}(\varepsilon_{sj}\alpha\pi) \circ t_{si}(\pi) = F_i(\neq s) \circ [t_{is}(\chi) \circ t_{s^*j}(\alpha)] \circ t_{j^*i}(\varepsilon_{sj}\alpha\pi) \circ t_{si}(\pi) =$$

$$[\widetilde{F}_i(\neq s) \circ \ \boldsymbol{t}_{s^*j}(\alpha)] \circ \ t_{is}(\chi) \circ t_{j^*i}(\varepsilon_{sj}\alpha\pi) \circ t_{si}(\pi) \tilde{\to} \widetilde{F}_i \circ [t_{is}(\chi) \circ t_{j^*i}(\varepsilon_{sj}\alpha\pi)] \circ t_{si}(\pi) =$$

$$\widetilde{F}_i \circ [t_{j^*i}(\varepsilon_{sj}\alpha\pi) \circ t_{j^*s}(-\varepsilon_{sj}\alpha\pi\chi)] \circ (is) = \widetilde{F}_i \circ t_{j^*s}(-\varepsilon_{sj}\alpha\pi\chi) \circ t_{j^*i}(\varepsilon_{sj}\alpha\pi) \circ (is) =$$

$$[\widetilde{F}_i \circ \ \boldsymbol{t}_{s^*j}(\alpha\pi\chi)] \circ t_{j^*i}(\varepsilon_{sj}\alpha\pi) \circ (is) \tilde{\to} \widetilde{F}_i \circ t_{j^*i}(\varepsilon_{sj}\alpha\pi) \circ (is). \qquad (*)$$

Если в полученной записи буква $t_{j^*i}(\varepsilon_{sj}\alpha\pi)$ естественна (например, при $j > i$, в этом случае $j^* \in P_i$, см. п. II a)), то используя результат п. II c), находим $V \tilde{\to} [\tilde{F}_i \circ \mathbf{t}_{j^*i}(\varepsilon_{sj}\alpha\pi) \circ (is) \tilde{\to} \tilde{F}_i(\neq j^*) \circ \begin{bmatrix} t_{ij^*}(*) \\ (ij^*) \end{bmatrix} \circ (is).$ Если же там $t_{j^*i}(\varepsilon_{sj}\alpha\pi)-$ неестественна (так будет, например, при $j < i$), то применяя свойство (ε_{ij}) и результаты п. II d), будем иметь $V \tilde{\to} [\tilde{F}_i \circ \mathbf{t}_{i^*j}(\varepsilon_{sj}\alpha\pi)] \circ (is) \tilde{\to}$ $\tilde{F}_i(\neq p) \circ \begin{bmatrix} t_{ip}(*) \\ (ip) \end{bmatrix} \circ (is),$ где $p-$некоторый номер из P_i. Но оба эти результата имеют вид (p), поэтому при помощи использованных в п. III d) соотношений приводятся к виду $\tilde{f}_i$.

e) $r = i^*(\to s \neq i^*).$ Этот случай, как мы видели в п.II d), имеет место только при $j \le i.$ Разберем сперва случай $j < i.$ Здесь из неравенств $j < i < s,\ s^*$ легко следует естественность буквы $t_{s^*j}(*).$ Учитывая это, а также применяя 7, (ε_{ij}), (20) и результаты пп. II в), c), в этом случае будем иметь

$$V = F_i(\neq s) \circ (is) \circ \mathbf{t}_{i^*j}(\alpha) = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ t_{j^*i}(-\varepsilon_{ij}\alpha)] = F_i(\neq s) \circ t_{j^*i}(-\varepsilon_{ij}\alpha) \circ t_{j^*s}(*) \circ (is)$$

$$= [F_i(\neq s) \circ \mathbf{t}_{i^*j}(\alpha) \circ \mathbf{t}_{j^*s}(*)] \circ (is) \tilde{\to} \tilde{F}_i \circ (is) = [\tilde{F}_i \circ \mathbf{t}_{is}(\chi)] \circ t_{si}(\pi) \tilde{\to} \tilde{F}_i \circ \mathbf{t}_{si}(\pi) \tilde{\to} \tilde{f}_i.$$

Пусть $j = i.$ Здесь мы используя (18), 6 и результаты пп. II в) – d), III d) (случай $j = i$), получаем

$$V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ \mathbf{t}_{i^*i}(\alpha)] = F_i(\neq s) \circ [t_{i^*i}(\alpha) \circ t_{s^*i}(*) \circ t_{s^*s}(*)] \circ (is) =$$

$$[F_i(\neq s) \circ \mathbf{t}_{s^*i}(*) \circ \mathbf{t}_{s^*s}(*)] \circ t_{i^*i}(\alpha) \circ (is) \tilde{\to} [F_i \circ \mathbf{t}_{i^*i}(\alpha)] \circ (is).$$

Приводимость полученного слова к виду $\tilde{f}_i$ уже нами показана в п. III c) (см. случай $j = i$).

f) Переходим к завершающему этапу доказательства, когда $r \notin \{i, i^*, s, s^*\}.$ Разберем сперва случай $j = i\ (\to r > i).$ Если при этом $s = i^*$, то применение (19) и результатов пп. II c) (случаи $j \ge i$), II b) дает нам

$$V = F_i(\neq i^*) \circ [(ii^*) \circ \mathbf{t}_{ri}(\alpha)] = [F_i(\neq i^*) \circ \mathbf{t}_{ri}(\alpha) \circ t_{rr^*}(*) \circ t_{ri^*}(*)] \circ (ii^*) \tilde{\to}$$

$[F_i(\neq i^*)\circ t_{ii^*}(\cdot)\circ t_{ii^*}(\chi)]\circ t_{i^*i}(\pi)=F_i(\neq i^*)\circ(ii^*)$.

Пусть теперь $j=i,$ но $s\neq i^*$. Здесь мы применяя (20), 6 (в случае неестественных $t_{rs}(*)$ и 7), а также результат п. II c), будем иметь

$V=F_i(\neq s)\circ[(is)\circ\ \boldsymbol{t}_{ri}(\alpha)]=F_i(\neq s)\circ[t_{ri}(\alpha)\circ t_{rs}(*)]\circ(is)=[F_i(\neq s)\circ t_{rs}(*)]\circ t_{ri}(\alpha)\circ$

$(is)\tilde{\to}\tilde{F}_i\circ\boldsymbol{t}_{ri}(\alpha)]\circ(is)$, т.е. имеем слово разобранного вида $(*)$.

Случай $j=i^*$ в этом пункте также невозможен, поскольку естественность $\boldsymbol{t}_{ri^*}(\alpha)\to r\leq mn$ (ибо $i^*>mn$) $\to i^*>r^*>mn\to r<i<i^*$ и последнее исключено условием теоремы.

Пусть $j=s$ $(\to r>i$ по условию теоремы и $s\neq i^*$ согласно сделанному только что исключению). Легко проверить, что здесь наряду с $\boldsymbol{t}_{rs}(\alpha)$ буква $t_{ri}(\alpha)$ также будет естественной. В рассматриваемом случае применяя (22) и результаты п. II c) (случаи $j\geq i$), будем иметь $V=F_i(\neq s)\circ[(is)\circ\ \boldsymbol{t}_{rs}(\alpha)]=$ $[F_i(\neq s)\circ\ \boldsymbol{t}_{rs}(\cdot)]\circ t_{ri}(*)\circ(is)\tilde{\to}\tilde{F}_i\circ\ \boldsymbol{t}_{ri}(*)\circ(is)$. Это слово имеет вид $(*)$ и его приводимость к виду $\tilde{f}_i$ уже нами показана в п. III d).

Случай $j=s^*$ $(\to s\neq i^*)$, как легко проверить, возможен только при $r>i$ и естественности буквы $t_{ir^*}(\alpha)$. Здесь применение 7, (16) и результатов пп. II c), b) приводит нас к

$V=F_i(\neq s)\circ(is)\circ\ \boldsymbol{t}_{rs^*}(\alpha)=F_i(\neq s)\circ[(is)\circ t_{sr^*}(-\varepsilon_{sr}\alpha)]=F_i(\neq s)\circ t_{sr^*}(-\varepsilon_{sr}\alpha)\circ t_{ir^*}(*)\circ$

$(is)=[F_i(\neq s)\circ\ \boldsymbol{t}_{rs^*}(\alpha)]\circ t_{ir^*}(*)\circ(is)\tilde{\to}[\tilde{F}_i(\neq s)\circ\boldsymbol{t}_{ir^*}(*)]\circ(is)\tilde{\to}\tilde{F}_i(\neq s)\circ(is)$.

Пусть теперь $j\neq i,\ i^*,s,\ s^*$. Здесь применение (23) и результатов разобранных пп. II a), c) дает нам $V=F_i(\neq s)\circ[(is)\circ\ \boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)]=[F_i(\neq s)\circ\ \boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)]\circ(is)$ $\tilde{\to}\tilde{F}_i(\neq s)\circ(is)$.

Итак, во всех имеющихся случаях слово $V=F_i(\neq s)\circ(is)\circ\ \boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)$ нами действительно преобразовано к виду $\tilde{f}_i$ и все примененные операции выполнялись только при помощи соотношений 1−8 и 10−12. Это и означает справедливость теоремы.

§7. Стандартные формы в $Sp^{\circ}(2n,R)$

Наш метод здесь использует стандартные формы симплектических матриц. К изучению таких форм предпошлем следующие вспомогательные факты. Рассмотрим подалфавит

$$\boldsymbol{t}_{pq}(\alpha),\ \alpha\in R_p,\ 1\le q<p\le 2mn;\quad d_k(\varepsilon),\ \varepsilon\in R_k^{\circ},\ k\in I(2mn) \qquad (2')$$

алфавита (2). Введем в алфавите $(2')$ формы $g_i=\prod\limits_{q\in P_i}\boldsymbol{t}_{qi}(\alpha_q),\ 1\le i\le mn.$ Такие слова мы назовем *столбцовыми формами* ступени i. Ниже записям $g_i(\ne r)$, $g_i(\ne k,r)$ и т.д. придается знакомый уже нам смысл.

Нам нужна еще

Лемма 5. *Пусть задана столбцовая форма* $g_i=\prod\limits_{q\in P_i} t_{qi}(\alpha_q)\ (1\le i\le mn)$ *и пусть* $r,\dots,j$ *– произвольная перестановка номеров из* P_i. *Тогда применяя соотношения* 4–7, *можно выполнить преобразование*

$$g_i=\boldsymbol{t}_{ri}(\beta_r)\circ\ldots\circ\boldsymbol{t}_{ji}(\beta_j)=\tilde{g}_i,$$

где $\beta_t=\alpha_t$ *при всех* $t\ne i^*$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2. Его мы опускаем.

Введем теперь в множестве всех слов алфавита $(2')$ отношения $\underset{i}{\tilde{\to}}$, $1\le i\le mn,$ положив $W\underset{i}{\tilde{\to}}V$ тогда и только тогда, когда эти слова связаны соотношением $W=V\circ Y,$ где Y – некоторое слово, не содержащее ненулевые квазитрансвекции вида $\boldsymbol{t}_{rj}(*),\ j\le i\ \ (r>j).$ Отношения $\underset{i}{\tilde{\to}}$ также рефлексивны и транзитивны.

Лемма 6. (о столбцовой трансформации букв). *Пусть задана столбцовая форма* $g_i=\prod\limits_{q\in P_i}\boldsymbol{t}_{qi}(\alpha_q)\ \ (1\le i\le mn)$ *и пусть* y *означает либо диагональную букву* $d_k(\tau)$, *либо же ненулевую квазитрансвекцию* $\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)$, *для которой* $r>j\ge i.$ *Тогда применяя соотношения* 3 – 7, *можно выполнить преобразование*

$$V=y\circ g_i\underset{i}{\tilde{\to}}\tilde{g}_i, \qquad (\tilde{\to}')$$

где $\tilde{g}_i$ *– также некоторая столбцовая форма ступени* i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для упрощения записей и в этом пункте отношение $\underset{i}{\tilde{\to}}$ обозначим как $\tilde{\to}$. Если $y=d_k(\tau),$ то преобразование $(\tilde{\to}')$ применением 3 выполняется так $V=d_k(\tau)\circ g_i=\tilde{g}_i\circ d_k(\tau)\tilde{\to}\tilde{g}_i$. Если же $y=\boldsymbol{t}_{ri}(\alpha),$ то $(\tilde{\to}')$ при помощи 4 и леммы 5 осуществляется как $V=[\ \boldsymbol{t}_{ri}(\alpha)\circ\boldsymbol{t}_{ri}(\alpha_r)]\circ g_i(\ne r)=\boldsymbol{t}_{ri}(\beta_r)\circ g_i(\ne r)=\tilde{g}_i$.

Ниже мы будем считать $y = t_{rj}(\alpha)$ и $j > i$. Вводим обозначения $V_{r,j} = t_{ji}(\alpha) \circ t_{i^*i}(-[\varepsilon_{ij}\alpha\alpha_j^2]_{rj^*}) \circ t_{ri}(x), W_{r,j} = t_{r^*i}(\alpha_{r^*}) \circ t_{j^*i}(\varepsilon_{rj}\alpha\alpha_{r^*})$. Здесь естественность $t_{rj}(\alpha)$ возможна только при $j \le mn$. Отсюда следует, что либо $i < j < r \le mn$, либо же $r \ge j^* > i^*$. Эти выкладки показывают, что в рассматриваемом случае $r, j \in P_i$. Учитывая сказанное и применяя лемму 5, а также соотношения 4 – 7, здесь мы требуемую форму получаем так

$$V = \boldsymbol{t}_{rj}(\alpha) \circ g_i = [t_{rj}(\alpha) \circ t_{ji}(\alpha_j)] \circ \tilde{g}_i(\ne j) = V_{r,j} \circ t_{rj}(\alpha) \circ \tilde{g}_i(\ne j) = V_{r,j} \circ [t_{j^*r^*}(\varepsilon_{rj}\alpha) \circ$$

$$t_{r^*i}(\alpha_{r^*})] \circ \tilde{g}_i(\ne j, r^*) = V_{r,j} \circ W_{r,j} \circ [t_{rj}(\alpha) \circ t_{ki}(\alpha_k)] \circ \tilde{g}_i(\ne j, r^*, k) = V_{r,j} \circ$$

$$W_{r,j} \circ t_{ki}(\alpha_k) \circ [t_{rj}(\alpha) \circ \tilde{g}_i(\ne j, r^*, k)] = \ldots = [V_{r,j} \circ W_{r,j} \circ \tilde{g}_i(\ne j, r^*)] \circ t_{rj}(\alpha) \tilde{\to} \tilde{g}_i.$$

Приведенные выкладки показывают справедливость леммы 6.

Переходим к вопросу о стандартном строении. *Стандартными формами* в $Sp^\circ(2n,R)$ объявляем всевозможные комбинации алфавита (2) вида

$$g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_{mn} \circ d_1(\varepsilon_1) \circ d_2(\varepsilon_2) \circ \ldots \circ d_{mn}(\varepsilon_{mn}) \circ f_{mn} \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1 \qquad (sf)$$

(g_i, f_i – столбцовые и строчные формы ступеней i соответственно, $i = 1,\ldots, mn$). Представления в виде (sf), очевидно, не однозначны. Ниже $s(W)$ будет означать одну (не важно какую) из стандартных форм слова W.

Теорема 2. *Применяя соотношения* 1–8 *и* 10–12, *всякое слово* W *алфавита* (2) *можно привести к стандартному виду* $s(W)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не теряя общности заданное слово можно считать представленным в виде

$$W \overset{1}{\tilde{\to}} f_1 \circ X, \qquad (\overset{1}{\tilde{\to}})$$

где f_1 – некоторая строчная форма ступени 1 и X – соответствующее ей дополнение. Используя 7 и 1, это дополнение X можно считать составленным только из диагональных букв $d_k(\tau)$ и квазитрансвекций естественного вида $\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha)$. Пусть $X = x \circ \tilde{X}$, т.е. x – первая (ненулевая) буква X. Применение строчной трансформационной теоремы 1 рассматриваемое слово приводит к виду $W \overset{1}{\tilde{\to}} (f_1 \circ x) \circ \tilde{X} \overset{1}{\tilde{\to}} \tilde{f}_1 \circ \tilde{X}$, где $\tilde{f}_1$ – некоторая (также строчная) форма ступени 1, т.е. для W будем иметь представление того же вида ($\overset{1}{\tilde{\to}}$), но уже с укороченным дополнением X. Выполняя описанную операцию несколько раз, мы приходим к записи вида $W \overset{1}{\tilde{\to}} f_1$. Последнее по определению $\overset{1}{\tilde{\to}}$ означает, что $W = X^1 \circ f_1$, где X^1 – некоторое слово, недиагональные буквы которого не представляются в естественном виде $\boldsymbol{t}_{1j}(\alpha)$. Повторяя проделанные рассуждения для X^1 в последнем равенстве, выделяем из него форму f_2 ступени 2, т.е. для W будем иметь $W = X^2 \circ f_2 \circ f_1$, где X^2 не содержит ненулевые квазитрансвекции, допускающие (естественные) формы $\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha),\ r < j,\ r \le 2,$ и т.д. Описанный процесс отщепления форм f_i на (mn)-м шаге приводит нас к

$$W = X^{mn} \circ f_{mn} \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1, \qquad (^{mn})$$

где сомножитель X^{mn} состоит только из диагональных букв $d_k(\tau)$ и ненулевых квазитрансвекций, которые не допускают (согласно определению $\overset{mn}{\tilde{\to}}$) естественную запись $\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha),\ r < j,\ r \le mn.$ Очевидно, такие квазитрансвекции в естественном виде представляются только как $\boldsymbol{t}_{rj}(\alpha),\ r > j.$ Замена теперь недиагональных букв из X^{mn} с их естественными формами при помощи 7, переведет последнее в некоторое слово алфавита ($2'$).

Полученное слово X^{mn} на сомножители далее разлагается так. И здесь не теряя общности его будем считать представленным в виде

$$X^{mn} \underset{1}{\tilde{\to}} Y \circ g_1, \qquad (\underset{1}{\tilde{\to}})$$

где g_1 – некоторая столбцовая форма ступени 1 и Y – соответствующее ей (уже левое) дополнение. Пусть $Y = \tilde{Y} \circ y,$ т.е. y – последняя буква $Y.$ Здесь применение столбцовой трансформационной леммы 6 дает нам X^{mn} $\underset{1}{\tilde{\to}}\ \tilde{Y} \circ (y \circ g_1) \underset{1}{\tilde{\to}} \tilde{Y} \circ \tilde{g}_1,$ где $\tilde{g}_1$ – также некоторая столбцовая форма ступени 1, т.е. этой операцией мы добились сокращения длины Y в ($\underset{1}{\tilde{\to}}$). Продолжая эти сокращения, мы приходим к $X^{mn} \underset{1}{\tilde{\to}} g_1$, т.е. к разложению $X^{mn} = g_1 \circ Y^1$, где Y^1 не содержит буквы вида $t_{r1}(\alpha), \alpha \ne 0.$ Аналогичным образом поступая с $Y^1,$ вытягиваем из него форму g_2, т.е. будем иметь $X^{mn} = g_1 \circ g_2 \circ Y^2$, где слово Y^2 не содержит квазитрансвекции вида $t_{rj}(\alpha) \ne 0,\ j \le 2\ (r > j),$ и т.д. Этот процесс на (mn)-м шаге приведет нас к $X^{mn} = g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_{mn} \circ D,$ где D – слово, составленное (по определению $\underset{mn}{\tilde{\to}}$) только из диагональных букв $d_k(\tau).$ Сомножитель D в последнем равенстве соотношениями 1 и 2 приводится к виду $D =\ d_1(\varepsilon_1) \circ \ldots \circ d_{mn}(\varepsilon_{mn})$ уже очевидным образом. Подставляя теперь в (^{mn}

) найденные для X^{mn} и D выражения, мы приходим к стандартному разложению $s(W)$ слова W. Теорема 2 доказана.

§8. Основной результат

Этот пункт завершает начатые выше исследования. Слово алфавита (2), у которого аргументы всех его букв радикальны, назовем *радикальным* словом. Далее, стандартные записи вида

$$s^*(W) = g_m \circ g_{2m} \circ g_{3m} \circ \ldots \circ g_{nm} \circ d_m(\varepsilon_1) \circ d_{2m}(\varepsilon_2) \circ d_{3m}(\varepsilon_3) \circ \ldots \circ d_{nm}(\varepsilon_n) \circ F_{nm} \circ \ldots \circ F_{3m} \circ F_{2m} \circ F_m$$

будем называть *приведенными* стандартными формами.

Теперь мы вплотную подошли к формулировке основного результата главы.

Теорема 3. *Обобщенная симплектическая группа* $Sp^{\circ}(2n,R)$, $n \geq 2$, *над коммутативным полулокальным кольцом* R *в образующих* (2) *представляется соотношениями* 1 – 12.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $W = 0$ – произвольное соотношение группы $Sp^{\circ}(2n,R)$ в образующих (2). Применяя к левой части теорему 2, приводим его к виду

$$s(W) = g_1 \circ \ldots \circ g_{nm} \circ d_1(\varepsilon_1) \circ \ldots \circ d_{nm}(\varepsilon_{nm}) \circ f_{nm} \circ \ldots \circ f_1 = 0. \qquad (s)$$

Пусть в (s) $f_1 = F_1 \circ (1s)$. Эта форма обязана иметь вид $f_1 = F_1$, ибо в противном случае (т.е. при $s > 1$) позиция $<1, 1>$ в $s(W)$ была бы сравнима с $-e_1$ – а это противоречие. Сравнение в (s) строк и столбцов с номерами 1 показывает, что формы g_1, $d_1(\varepsilon_1)$, F_1 будут радикальными. Переходя к номеру 2, точно таким же образом заключаем $f_2 = F_2$ и радикальность форм g_2, $d_2(\varepsilon_2)$, F_2 и т.д. На m-м шаге мы приходим к радикальности сомножителей g_m, $d_m(\varepsilon_m)$, $f_m = F_m$.

Заменяя теперь при помощи 9 (“многообличные”) буквы из g_k, $d_k(\varepsilon_k)$, F_k, $k < m$, с буквами вида $\boldsymbol{t}_{rm,m}(\cdot)$, $d_m(\cdot)$, $\boldsymbol{t}_{m,pm}(\cdot)$, затем собирая их с помощью 1, 4, 6, приводим равенство (s) к виду

$$s(W) = g_m \circ g_{m+1} \circ \ldots \circ g_{nm} \circ d_m(\sigma_1) \circ d_{m+1}(\varepsilon_{m+1}) \circ \ldots \circ d_{nm}(\varepsilon_{nm}) \circ f_{nm} \circ \ldots \circ f_{m+1} \circ F_m = 0.$$

Аналогичные операции с отрезками $g_{m+1} \circ \ldots \circ g_{2m}$, $d_{m+1}(\varepsilon_{m+1}) \circ \ldots \circ d_{2m}(\varepsilon_{2m})$,

$f_{2m}\circ\ldots\circ f_{m+1}$ в последнем равенстве приведут нас к

$$s(W)=g_m\circ g_{2m}\circ g_{2m+1}\circ\ldots\circ g_{nm}\circ d_m(\sigma_1)\circ d_{2m}(\sigma_{2m})\circ\ldots\circ d_{nm}(\varepsilon_{nm})\circ f_{nm}\circ\ldots\circ f_{2m+1}\circ F_{2m}\circ F_m=0$$

и т.д. Этот процесс на n-м шаге дает нам

$$s^*(W)=g_m\circ g_{2m}\circ\ldots\circ g_{nm}\circ d_m(\sigma_1)\circ d_{2m}(\sigma_2)\circ\ldots\circ d_{nm}(\sigma_n)\circ F_{nm}\circ\ldots\circ F_{2m}\circ F_m=0 \qquad (s^*)$$

(т.е. дает “приведенное” следствие из (s)).

Истолковываем теперь $s^*(W)$ как неразвернутую матрицу и пусть там $F_m=\prod_{1<k\le 2n} t_{m,\,km}(\alpha_k)$. Тогда первая строка формы $s^*(W)$ (она такая же, что и в $d_m(\sigma_1)\circ F_m$) имеет вид

$$<\sigma_1,\ \alpha_2+\sigma_1\alpha_2,\ldots,\alpha_{2n}+\sigma_1\alpha_{2n}>$$

и она равна нулю. Но, как легко видеть, так может быть только при $\sigma_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{2n}=0.$ Сравнение в (s^*) первых столбцов аналогичным образом показывает, что и форма g_m имеет нулевые аргументы. Удаляя эти нулевые сомножители из (s^*), тогда, будем иметь

$$s^*(W)=g_{2m}\circ\ldots\circ g_{nm}\circ d_{2m}(\sigma_2)\circ\ldots\circ d_{nm}(\sigma_n)\circ F_{nm}\circ\ldots\circ F_{2m}=0.$$

Повторяя для $g_{2m},\ d_{2m}(\sigma_2),\ F_{2m}$ только что проведенные рассуждения, заключаем, что и у них аргументы – нулевые, и т.д. Этот процесс аннуляции аргументов на n-м шаге приводит нас к $s^*(W)=0,$ где $s^*(W)-$ уже пустое слово. Итак, мы показали, что следствие (s^*) возможно только тогда, когда его форма $s^*(W)-$ графически нулевая. А это означает, что $W=0$ есть следствие соотношений 1 – 12. Теорема 3 доказана в полном объеме.

Представляет интерес случай, когда кольцо R среди своих полей вычетов не содержит поле $\boldsymbol{F}_2$ из двух элементов. Для таких R доказательство теоремы 3, как это хорошо видно, проходит без использования соотношений 12. Поэтому в этом случае основной результат формулируется как

Теорема 4. *Обобщенная симплектическая группа* $Sp^\circ(2n,R),\ n\ge 2$, *над коммутативным полулокальным кольцом* R, *все поля вычетов которого содержат не менее трех элементов, в образующих* (2) *представляется соотношениями* 1 – 11.

Очевидно, при $m = 1$ (т.е. когда R локально) соотношения 9 оказываются лишенными смысла. Поэтому в случае локального R в теоремах 3 и 4 серию 9 из указанных там списков соотношений следует считать опущенной.

§9. Описание Дика проективного фактора $PSp^{\circ}(2n, R)$

Нашей целью в этом параграфе является выявление генетического опи-сания проективной полной симплектической группы $PSp^{\circ}(2n, R)$ степени $2n$ над произвольным коммутативным полулокальным кольцом R, для которого существование 1, по-прежнему, не обязательно. Наши исследования здесь будут существенным образом опираться на результаты предыдущих параграфов этой же главы, где были выявлены определяющие группу $Sp^{\circ}(2n, R)$ соотношения 1 – 12 в образующих (2). Требуемое описание Дика для фактора $PSp^{\circ}(2n, R)$ будет находиться по следующей схеме: 1) сначала вычисляется центр $C = centSp^{\circ}(2n, R)$ группы $Sp^{\circ}(2n, R)$; 2) находится некоторая (естественная) порождающая центра C (в том же алфавите (2)) система слов W; 3) приравниванием найденных образующих к нулю, составляются соотношения $W=0$ (т.е. соотношения $w=0$, где w пробегает множество W). Тогда требуемое диковское описание можно получить (см. об этом [9]) присоединением к 1 – 12 “ центральных соотношений” $W =0$ как $PSp^{\circ}(2n, R)$= < (2) // 1 –12, $W =0$ >.

Ниже будут действовать следующие обозначения: $s_k(x_1, \ldots, x_m)$ – основной симметрический многочлен степени k, $1 \leq k \leq m$, от переменных $x_1, \ldots, x_m$; $D_k(x)=(x)_{kk}+(x')_{k+n,k+n}$, $x \in R$, $1 \leq k \leq n$ (т.е. $D_k(x)$ – неразвернутый аналог симплектической матрицы $d_k(\varepsilon)$); $D(x)=D_1(x) \cdots D_n(x)$ – симплектическая скалярная матрица (она имеет порядок $2n$); $I=AnnR=\{\alpha \in R\colon \alpha x = 0$ при всех $x \in R\}$ – аннулятор кольца R. Он очевидным образом образует идеал в R. Поскольку для любого x из I–$x=x'$ (т.е. все элементы этого идеала квазиобратимы), имеет место (идеальное) включение $I \subseteq J$.

Сперва мы охарактеризуем элементы из C.

Теорема 5. *Матрица* $a=(a_{kq})_{1\le k,q\le 2n}$ *из* $Sp^{\circ}(2n,R)$ *принадлежит центру* C *тогда и только тогда, когда для нее*

$$a_{qq}\equiv a_{11}(\mathrm{mod}\, I), q=2,..n, \text{ и } a_{11}\circ a_{11}\equiv a_{kq}\equiv 0(\mathrm{mod}\, I) \text{ при всех } k\neq q. \qquad (C)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть матрица a–центральна. Возьмем произвольно номера $k,q\in I(2n), k\neq q$. Пусть далее, i,j–такие номера из $I(2mn)$ (они также произвольные), что и $p(j)=q$. Сравнение в обеих частях $a\circ t_{ij}(\alpha_i)=t_{ij}(\alpha_i)\circ a$ позиций $<k,k>$ дает нам $\alpha_j a_{qk}=0$ (α_i–любой элемент R_i). Тогда при всех $\alpha=\alpha_1+...+\alpha_m$ из $R_1+...+R_m=R$ будем иметь $\alpha a_{qk}=\sum\limits_{1\le i\le m}\alpha_i a_{qk}=0$, т.е. имеем

$$a_{qk}\in I. \qquad (I)$$

Аналогичным образом для $q, 1<q\le n+1$, и "внутренних" номеров $i,j\in I(2mn)$, $p(i)=1$, $p(j)=q$ сравнивая в $a\circ t_{ij}(\alpha_i)=t_{ij}(\alpha_i)\circ a$ позиции $<1,q>$, мы приходим к $\alpha_i(a_{11}-a_{qq})=0$. Последнее, как и выше, дает нам $\alpha(a_{11}-a_{qq})=0$ (также при всех $\alpha\in R$), т.е. имеем $a_{qq}\equiv a_{11}(\mathrm{mod} I)$. Интерпретируем теперь a как клеточную матрицу $a=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T\end{pmatrix}$ с клетками порядка n. Тогда первое равенство из (Sp°) (см. работу [36]) и (I) дают нам следующие импликации:
$X-YZ^T+XT^T+T^T=0\to X\circ T^T=0\to a_{11}\circ a_{n+1,n+1}=0\to a_{11}\circ(a_{11}+x)=0$ при некотором $x\in I\to a_{11}\circ a_{11}=-x\in I$. Справедливость теоремы в указанную сторону установлена.

Пусть теперь, обратно, a удовлетворяет требованиям (C). Равенство $X\circ T^T=0$ (X, T – диагональные клетки матрицы a), как и выше, здесь дает нам $a_{qq}\circ a_{q+n,q+n}=0, q=1,...,n$. Далее, условие $a_{11}\circ a_{11}=x\in I$ и равенство $x'=-x$ показывают, что $a_{11}^{'}=a_{11}\circ x^{'}=a_{11}-x$. Поэтому для указанных значений q, ввиду (C) и установленного только что факта, справедливо

$$a_{q+n,q+n}=a_{qq}^{'}=(a_{11}+y)^{'}=a_{11}-y=a_{11}-(x+y)\equiv a_{11}(\mathrm{mod} I)$$

(здесь у–также некоторый аннуляторный элемент). Итак, при выполнении требований (C) рассматриваемая матрица представляется в виде $a = d(a_{11}) + \widetilde{a}$, где $\widetilde{a}$ —некоторая матрица из $M(2n,I)$. А то, что всякая такая сумма $d(a_{11}) + a$ принадлежит центру C, теперь уже очевидно. Доказательство теоремы 5 закон-чено.

Переходим теперь к вопросу о выявлении порождающих слов центра C (в тех же образующих (2)). Пусть $a = (a_{qk})$ − произвольная нерасширенная матрица из C. Поскольку $I \subseteq J \subseteq R_m$, недиагональные позиции a_{qk} в a (они по теореме 5 аннуляторны) можно заменить с соответствующими им расширенными квазитрансвекциями $t_{gm,km}(a_{qk})$. А диагональные же ее элементы можно представить в виде $a_{qq} = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{m-1} + \sigma$, где $\varepsilon_i \in R_i$, $\sigma \in R_m$. Здесь квазиобратимость матрицы a очевидным образом влечет за собой квазиобратимость слагаемых ε_i и σ в R_i и R_m соответственно. Теперь сравнения

$\varepsilon'_{m-1} \circ \ldots \circ \varepsilon'_1 \circ (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{m-1} + \sigma) \equiv \varepsilon'_{m-1} \circ \ldots \quad \varepsilon'_2 \circ (\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{m-1} + \sigma) \equiv \ldots \equiv \varepsilon'_{m-1} \circ (\varepsilon_{m-1} + \sigma) \equiv \sigma (\mathrm{mod} J)$

показывают, что $\varepsilon'_{m-1} \circ \ldots \circ \varepsilon'_1 \circ (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{m-1} + \sigma) = \sigma + x$, где x −некоторый радикальный элемент. Последнее введением обозначения $\sigma + x = \varepsilon_m$ для позиций $< q, q, >$ дает нам следующие квазимультипликативные представления

$$\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{m-1} + \sigma = \varepsilon_1 \circ \ldots \circ \varepsilon_{m-1} \circ \varepsilon_m$$

(где $\varepsilon_t \epsilon R_t$ и все они квазиобратимы).

Понимая теперь a в развернутом смысле и повторяя для нее доказательство теоремы 2, можно представить эту матрицу в стандартной форме вида

$$a = g_m \circ g_{2m} \circ \ldots \circ g_{nm} \circ d_1(\varepsilon_1) \circ d_2(\varepsilon_2) \circ \ldots \circ d_{nm}(\varepsilon_{nm}) \circ f_{mn} \circ \ldots \circ f_{2m} \circ f_m. \quad (sf_a)$$

Трансвекции форм g_{km}, f_{km} в этом разложении имеют вид $t_{qm>km}(x)$ и $t_{km<qm}(y)$ ($1 \leq k \leq n$) соответственно, где x, y − некоторые аннуляторные элементы. Поскольку такие квазитрансвекции − центральные (по теореме 5),

и сами эти формы $g_{km,}\ f_{km}$ здесь будут элементами центральными. Отсюда очевидным образом следует центральность и диагонального отрезка D=$d_1(\varepsilon_1)$∘$d_2(\varepsilon_2) \circ \dots \circ d_{nm}\ (\varepsilon_{nm})$ из (sf_a).

Нетрудно проверить, что при нерасширенном понимании этого отрезка его диоганальные позиции будут вычисляться по формулам G_1=$\varepsilon_1 \circ \dots \circ \varepsilon_m$, G_2=$\varepsilon_{m+1} \circ \dots \circ \varepsilon_{2m}$, …, G_n= $\varepsilon_{(n-1)m+1}$. Можно убедиться, что последние квази-произведения при помощи кольцевых действий могут быть вычислены по правилам $x_1 \circ \dots \circ x_m$=$S_1(x_1,\dots, x_m)$+ $S_2(x_1,\dots,x_m)$+…+$S_m(x_1,\dots,x_m)$. При принятых выше обозначениях диагональный отрезок из (sf_a) примет вид

$$D=D_1(\sigma_1)\circ D_2(\sigma_2) \circ\dots \circ D_n(\sigma_n).$$

Это же квазипроизведение можно представить и как

$$D= D(\sigma_1)\circ D_2(\ \sigma_1'\circ\sigma_2) \circ\dots\circ D_n(\sigma_1' \circ\sigma_n). \qquad (D)$$

Поскольку в последних записях

$$\sigma_1 \equiv \sigma_2 \equiv \cdots \equiv \sigma_n (mod I) \to \sigma_1'\circ\sigma_2 \equiv \cdots \equiv \sigma_1'\circ\sigma_n \equiv 0 (mod I),$$

сомножители $D_2(*),\dots,D_n(*)$ в (D) (вновь по теореме 5) будут давать нам некоторые элементы из C. Тогда представление (D) очевидным образом влечет за собой центральность и (симплектически) скалярного сомножителя $D(\sigma_1)$. По теореме 5 аргумент этого слова обязан удовлетворять сравнению “унипотентности” $\sigma_1\circ\sigma_1 \equiv 0(modI)$.

Проделанные выкладки показали нам, что центр C может быть порожден квазитрансвекциями $t_{qm,km}(x)$, $x \in I$, $1 \le q$, $k \le n$, $q \ne k$ (где еще $q \le n \vee k \le n$), диагональными симплектическими матрицами $d_{km}(x)$, $x \in I$, $1 < k \le n$, и еще центральными скалярными матрицами

$$D(\sigma_1) = d_1(\varepsilon_1)\circ \dots \circ d_m(\varepsilon_m)\circ d_{m+1}(\varepsilon_1)\circ \dots \circ d_{2m}(\varepsilon_m)\circ\dots \circ d_{(n-1)m+1}(\varepsilon_1)\circ \dots \circ d_{nm}(\varepsilon_m).$$

Объединяя эти факты с основной теоремой 3, а также учитывая упомянутую выше схему, теперь мы можем сформулировать основное утверждение о факторе $PSp^{\circ}(2n,R)$ как

Теорема 6. *Обобщенная проективная симплектическая группа* $PSp^{\circ}(2n,R)$, $n\geq 2$, *над коммутативным полулокальным кольцом* R *в алфавите (2) пред-ставляется соотношениями 1−12 и еще следующими соотношениями центральности*

13. $t_{qm,km}(x)=0,\ x\epsilon I,\ 1\leq q,k\leq n, q\neq k\ (q\leq n\vee k\leq n)$;

14. $d_{km}(x)=0, x\epsilon I,\ k=2,\dots,n$;

15. $d_1(\varepsilon_1)\circ\ldots\circ d_m(\varepsilon_m)\circ d_{m+1}(\varepsilon_1)\circ\ldots\circ d_{2m}(\varepsilon_m)\circ\ldots d_{(n-1)m+1}(\varepsilon_1)\circ\ldots\circ d_{nm}(\varepsilon_m)=0,$

где аргументы удовлетворяют включению “унипотентности” $(\varepsilon_1\circ\ldots\circ\varepsilon_m)\circ(\varepsilon_1\circ\ldots\circ\varepsilon_m)\ \epsilon I$.

В случаях же основных колец R, для которых $I=\{0\}$ (т.е. для “безаннуляторных” R, так будет, например, при любом кольце с 1), серии 13 и 14 просто-попросту исчезают, а соотношения 15 уже примут традиционный вид. Поэтому в этих случаях последнее утверждение обретет следующую классическую форму.

Теорема 7. *Обобщенная проективная симплектическая группа* $PSp^{\circ}(2n,R)$, $n\geq 2$, *над коммутативным полулокальным кольцом* R *с нулевым аннулятором I={0} в образующих (2) задается соотношениями 1−12 и еще следующими соотношениями (симплектической) скалярности* $d_1(\varepsilon_1)\circ\ldots\circ d_m(\varepsilon_m)\circ d_{m+1}(\varepsilon_1)\circ\ldots\circ d_{2m}(\varepsilon_m)\circ\ldots\circ d_{(n-1)m+1}(\varepsilon_1)\circ\ldots\circ d_{nm}(\varepsilon_m)=0$, *где аргументы удовлетворяют равенству квазиунипотентности* $(\varepsilon_1\circ\ldots\circ\varepsilon_m)'=\varepsilon_1\circ\ldots\circ\varepsilon_m)$.

Результаты этого параграфа в чуть другой форме были отражены в совместной работе [37].

ГЛАВА II. ОБРАЗУЮЩИЕ И СООТНОШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД ПОЛУЛОКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ

Отметим, что в [13], [14] были найдены образующие и соотношения обобщенной полной линейной группы $GL^{\circ}(n,\Lambda), n\geq 2,$ над произвольными полулокальными кольцами Λ (в случае наличия 1 в Λ последняя группа совпадает с обычной полной линейной группой $GL(n,\Lambda)$). Нашей целью в этой главе является выявление образующих и определяющих соотношений (предварительно построив квазиопределитель det°) обобщенной специальной линейной группы $SL^{\circ}(n,\Lambda), n\geq 2,$ над произвольным полулокальным кольцом $\Lambda,$ для которого условия коммутативности и существования 1 также не предполагаются. При решении этой задачи вновь применяется метод трансформации, развитый в [13]–[15] и других работах автора. Образующие и соотношения группы $SL^{\circ}(n,\Lambda), n\geq 3,$ в простейшем случае, когда $\Lambda=T$ – тело (здесь $SL^{\circ}(n,T)$ совпадает с $SL(n,T)$) другим методом были найдены в [53]. Хотя и настоящая глава имеет определенные перекрытия с [13] и [14], тем не менее, как мы увидим ниже, она представляет собой качественно новую задачу.

Переходим к точной постановке задачи. Пусть R – произвольное ассоциативное кольцо и $\circ$ – его квазиумножение, т.е. $x\circ y = x + xy + y$. Напомним, что элемент $\alpha\in R$ называется *квазиобратимым,* если для него $\alpha\circ\beta = 0 = \beta\circ\alpha$ при некотором $\beta\in R.$ По квазиобратимому $\alpha\in R$ его квазиобратное β всегда определяется однозначно и оно будет обозначаться как $\beta=\alpha'$. Совокупность всех квазиобратимых элементов R° из R образует группу относительно композиции $\circ$ (где единицей будет нуль). В случае, когда $R=M(n,\Lambda)$ – полное матричное кольцо над ассоциативным $\Lambda,$ группу квазиобратимых матриц из $M(n,\Lambda)$ принято обозначать как $GL^{\circ}(n,\Lambda)$ и называть ее обобщенной полной линейной группой степени n над ассоциативным кольцом $\Lambda.$ Поскольку в случае наличия 1 в Λ отображение

$\varphi: GL^{\circ}(n,\Lambda)\to GL(n,\Lambda),\ x\to E+x$ ($E-$ единичная матрица порядка n), задает изоморфизм, введенная группа $GL^{\circ}(n,\Lambda)$ является обобщением понятия обычной полной линейной группы на самые общие случаи ассоциативных колец $\Lambda.$

Далее, следуя [10] (см. сс. 351 и 337) ассоциативное кольцо Λ назовем *полулокальным* (*локальным*), если его фактор по радикалу Джекобсона $J(\Lambda)$ образует прямую сумму конечного числа полных матричных колец над телами (соответственно телом). Существование полулокальных колец без 1, а также степень расширяемости класса всех полулокальных колец по отношению к его подклассу таких колец с 1 методом прямых сумм без каких-либо изменений могут быть показаны как в случае локальных колец (см. об этом [18] и подробно [17]). Как там показано, эта степень очень велика.

Ниже (в §2) для полулокального кольца Λ нами будет построен квази-определитель $det^{\circ}: GL^{\circ}(n,\Lambda)\to G(\Lambda)$,где $G(\Lambda)-$ некоторая, вполне определенная по Λ, группа с композицией $\circ$ и единичным элементом $\boldsymbol{0}$. Этот квази-определитель det° представляет собой полулокальный квазианалог известного определителя Дьёдонне над телами (о котором см., например, [1], с. 205) и обладает свойством полной мультипликативности, т.е.

$$det^{\circ}(x\circ y)=det^{\circ}x\circ det^{\circ}y$$

для любых матриц $x,\ y\in GL^{\circ}(n,\Lambda)$. Специальная подгруппа из $GL^{\circ}(n,\Lambda)$ выделяется по обычному, т.е. как ядро $SL^{\circ}(n,\Lambda)=\{x\in GL^{\circ}(n,\Lambda): det^{\circ}x=\boldsymbol{0}\}$.

Как мы увидим в §9, решаемый здесь вопрос по существу содержит в себе описания образующими и соотношениями также подгрупп из $GL^{\circ}(n,\Lambda)$, содержащих $SL^{\circ}(n,\Lambda)$. Наши исследования здесь от [18] имеет следующие существенные отличия: 1) здесь вместо классических взяты “внутренние” образующие из $SL^{\circ}(n,\Lambda)$; 2) обобщены ранее известные, а также выявлены новые (возникающие в нелокальных случаях Λ) соотношения названной группы; 3) существенно усовершенствована техника преобразований.

§1. Обозначения и соглашения

Ниже наши рассуждения используют следующий факт. Пусть $R-$ ассоциативное кольцо и $J(R)$ – его радикал Джекобсона. Пусть далее, $\bar{x}$ – квазиобратимый класс из фактора $\overline{R}=R/J(R)$, представленный любым из своих вычетов x. Для него имеем сравнения $x\circ y\equiv y\circ x\equiv 0\,(mod\,J(R))$ при некотором $y\in R$, т.е. равенства

$$x\circ y=\boldsymbol{x},\quad y\circ x=\boldsymbol{y},\qquad (J(R))$$

где $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$ – некоторые элементы из $J(R)$. Включение $J(R)\subseteq R^{\circ}$ (оно верно для любого R, доказательство см., например, в [17]) и $(J(R))$ показывают, что $x\in R^{\circ}$, т.е. всякий квазиобратимый класс из $\overline{R}$ может быть поднят по модулю $J(R)$ до каждого его представителя.

Начиная отсюда всюду Λ будет обозначать произвольное полулокальное кольцо и $J=J(\Lambda)$ – его радикал Джекобсона. Согласно определению это означает, что

$$\Lambda/J=M(m_1,T_1)\oplus\ldots\oplus M(m_l,T_l),\qquad (2.1)$$

где m_i- натуральные числа, T_i- некоторые тела ($i=1,\ldots,l$). Для этого разложения положим $m_1+\ldots+m_l=m$ и $I(m)=\{1,2,\ldots,m\}$. Пусть $\bar{e}_{pq}$ означает матричную единицу, входящую в правую часть (1) (т.е. матрицу, где на позиции $<p,q>$ стоит единица из соответствующего тела, а прочие позиции заполнены нулями). Указуя номер клетки, куда входит $\bar{e}_{pq}$, мы для ее индексов будем писать $p\overset{i}{\sim}q$, если $\bar{e}_{pq}\in M(m_i,T_i)$. Ясно, что (дизъюнктная) сумма $\overset{1}{\sim}\cup\ldots\cup\overset{l}{\sim}$ $=\sim$ задает эквивалентность на $I(m)$. Далее, для эквивалентных номеров p,q из $I(m)$ обозначим через Λ_{pq} полный прообраз слагаемого $T_i\bar{e}_{pq}$, $p\overset{i}{\sim}q$, из правой части (2.1) при естественном эпиморфизме

$$\Lambda\to\Lambda/J=\overline{\Lambda},\ \alpha\to\overline{\alpha}=\alpha+J. \qquad (2.2)$$

При введенных обозначениях для кольца Λ имеет место разложение

$$\Lambda=\sum_{i\sim j}\Lambda_{ij}\quad(1\le i,j\le m). \qquad (2.3)$$

В (2.3) слагаемые $\Lambda_i=\Lambda_{ii}$ образуют локальные подкольца в Λ, а недиагональные Λ_{ij} $(i\neq j)$ – его Λ_i-Λ_j-бимодули.

Ниже для натурального i через $r(i)$ будет обозначен наименьший положи-тельный вычет этого числа по модулю m. Введенную выше эквивалентность $\sim$ на множество $I(mn)=\{1,2,\ldots,mn\}$ мы распространяем по правилу $i\sim j\leftrightarrow r(i)\sim r(j)$. Слагаемые из (2.3) на произвольные индексы $i,j\in I(mn)$ обобщаем как $\Lambda_{ij}=\Lambda_{r(i),r(j)}$ и для простоты положим $\Lambda_{ii}=\Lambda_i$. Тогда, как показывает (2.3), элементы из $M(n,\Lambda)$ представляются и в “расширенном матричном” виде

$$a=(a_{ij})_{i\sim j}\quad(1\le i,j\le mn), \qquad (2.4)$$

где $a_{ij}\in\Lambda_{ij}$. Очевидно, представления в виде (2.4) вообще говоря не однозначны (они однозначны в том и только том случае, когда либо $m=1$, либо же $J=\{0\}$). В работе для матриц из $GL^{\circ}(n,\Lambda)$ как их обычные, так и расширенные пред-ставления будут использованы одинаково. Если иное не оговорено, то $\equiv$ будет означать сравнение в Λ по модулю J. Ниже через $\overset{\frown}{x}$ будет обозначаться некоторый элемент из Λ, для которого $\overset{\frown}{x}\equiv x$. Далее, мы элементы из J будем называть *радикальными* элементами.

Для индекса $i\in I(mn)$ примем обозначение $p(i)=m\backslash[i-r(i)]+1$ (другими словами $p(i)$– это номер диагональной клетки в $M(n,\overline{\Lambda})$, куда входит единица $\bar{e}_{ii}$). Вводим к рассмотрению также операторы $[\ ]_{ij}$ на $\Lambda,\ i,j\in I(mn)$, определенные как

$$[\alpha]_{ij} = \begin{cases} \alpha, \text{если } p(i) = p(j), \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть далее, для индексов $i, j \in I(mn),\ i \neq j \sim i,$ и аргумента $x \in \Lambda_{ij}$ $t_{ij}(x)$ обозначает расширенную матрицу (4), где на позиции $<i, j>$ стоит элемент x, а на других позициях – нули.

Для номера $i \in I(mn)$ и аргумента $\varepsilon \in \Lambda_i^\circ$ положим $d_i(\varepsilon) = diag(0,...,0,\varepsilon,0, ...,0)$ (эта матрица имеет порядок mn), где ε стоит на i-м месте. Обозначим через $S = \{a,b,...,c\}$ наибольшую полную систему вычетов множества $I(mn)$ относительно эквивалентности $\sim$, т.е. такую систему, что для любого $t \in I(mn)$ $k \sim t \leq k$ при некотором и однозначно определенном номере k из S. Ясно, что эта система S содержит число mn и для нее $p(a) = p(b) = ... = p(c) = n.$ Для определенности ниже мы будем считать $\overline{\Lambda}_a = T_1, \overline{\Lambda}_b = T_2, ..., \overline{\Lambda}_c = T_l$.

Пусть $<\varepsilon,\sigma>$ – пара из $\Lambda_i^\circ \times \Lambda_j^\circ$, $j \neq i \sim j$, для которой $d_j(\bar{\sigma}) = d_j(\bar{\varepsilon}').$ Для нее мы положим $d_{ij}(\varepsilon,\sigma) = d_i(\varepsilon) + d_j(\sigma).$ Согласно факту, отмеченному в начале параграфа, введенные матрицы $t_{ij}(x), d_{ij}(\varepsilon,\sigma), d_i(\varepsilon),$ как прообразы квазиобратимых элементов при эпиморфизме

$$R = M(n,\Lambda) \to M(n,\overline{\Lambda}) = \overline{R}, \quad (a_{ij}) \to (\bar{a}_{ij}),$$

являются квазиобратимыми. Пусть $[\Lambda_i^\circ, \Lambda_i^\circ]$ означает коммутант группы Λ_i° (т.е. подгруппу в Λ_i°, порожденную всеми квазикоммутаторами $[x,y]^\circ = x' \circ y' \circ x \circ y,\ x,y \in \Lambda_i^\circ$). В следующем параграфе мы увидим, что матрицы $t_{ij}(x),$ $d_{ij}(\varepsilon,\sigma), d_i(\tau),$ где $\tau \in J \circ [\Lambda_i^\circ, \Lambda_i^\circ],$ входят также в группу $SL^\circ(n,\Lambda)$ (они и будут составлять “внутренние” образующие последней группы). Для квазиобратных введенных (элементарных) матриц имеют место формулы $d_i'(\tau) = d_i(\tau'),$ $d_{ij}'(\varepsilon, \sigma) = d_{ij}(\varepsilon', x),$ где $x = -\sigma - [\sigma\varepsilon']_{ij} - (\sigma + [\varepsilon]_{ij})'(\sigma + [\sigma\varepsilon']_{ij}),$ и $t_{ij}'(y) = t_{ij}(y^*),$ где y^* означает элемент y' при $p(i) = p(j)$ и $-y$ в противном случае. Ясно, что в последних формулах $x = \overset{\frown}{\sigma'}$ и $y^* = -\overset{\frown}{y}.$

§2. Квазиопределитель в $GL^{\circ}(n,\Lambda)$

Нашей целью в этом параграфе является построение эпиморфизма det°, упомянутого выше. Оно состоит из двух этапов и опирается на теорию известного определителя Дьёдонне над телами.

Этап I

Сначала мы рассмотрим случай, когда $\Lambda = M(n,T) -$ полное матричное кольцо над телом T. Для тела T справедливы равенства

$$T^{\cdot} = 1 + T^{\circ}, \quad [T^{\cdot}, T^{\cdot}] = 1 + [T^{\circ}, T^{\circ}], \qquad (T)$$

где $T^{\cdot} -$ обычная мультипликативная группа тела T и $[T^{\cdot}, T^{\cdot}] -$ ее коммутант (т.е. подгруппа, порожденная всеми коммутаторами $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy,\ x,y \in T^{\cdot}$). Эти равенства легко можно вывести из равносильностей $1 + x \in T^{\cdot} \leftrightarrow x \in T^{\circ}$ и $[1+x, 1+y] = 1 + [x,y]^{\circ} \in [T^{\cdot}, T^{\cdot}] \leftrightarrow [x,y]^{\circ} \in [T^{\circ}, T^{\circ}]$ соответственно. Пусть для группы G $c(G) = G/[G,G]$ обозначает ее фактор по коммутанту $[G,G]$ (он абелев). Равенства (T) показывают, что для рассматриваемого

$$T \ c(T^{\cdot}) = T^{\cdot}/[T^{\cdot}, T^{\cdot}] = (1+T^{\circ})/(1+[T^{\circ}, T^{\circ}]) = \{(1+x)(1+[T^{\circ}, T^{\circ}]) : x \in T^{\circ}\} =$$
$$\{1 + x \circ [T^{\circ}, T^{\circ}] : x \in T^{\circ}\} = 1 + T^{\circ}/[T^{\circ}, T^{\circ}] = 1 + c(T^{\circ}). \qquad (c)$$

Здесь по заданному $\beta \in c(T^{\cdot})$ его представление в виде $\beta = 1 + \alpha,\ \alpha \in c(T^{\circ})$, является однозначным (ибо $1 + X = 1 + Y \to X = Y$ для любых подмножеств $X, Y \subseteq T$).

Пусть $det : GL(n,T) \to c(T^{\cdot}) -$ классический определитель Дьёдонне порядка n над T (его действие на необратимые матрицы нам не нужно). Используя (c) составим следующую четырехчленную последовательность эпиморфизмов

$$GL^{\circ}(n,T) \xrightarrow{\varphi} GL(n,T) \xrightarrow{det} c(T^{\cdot}) = 1 + c(T^{\circ}) \xrightarrow{\psi} c(T^{\circ}), \qquad (2.5)$$
$$x \xrightarrow{\varphi} E + x \xrightarrow{det} det(E + x) = 1 + d_x \xrightarrow{\psi} d_x,$$

где $d_x -$ некоторый (однозначно определенный по $det(E+x)$) элемент из $c(T^{\circ})$. Квазиопределитель det° в $GL^{\circ}(n,T)$ (порядка n и над телом T) мы определим как композицию

$$det^{\circ} = \psi \circ det \circ \varphi : \ GL^{\circ}(n,T) \to c(T^{\circ}),\ x \to d_x.$$

Поскольку здесь $det^{\circ} -$ эпиморфизм, для него имеем $det^{\circ}(x \circ y) = det^{\circ} x \circ det^{\circ} y$ при всех $x, y \in GL^{\circ}(n,T)$. Как хорошо видно из (5) и определения, введенный квазиопределитель в рассматриваемом случае с определителем Дьёдонне связан соотношением

$$det(E + x) = 1 + det^{\circ} x. \qquad (2.6)$$

Этап II

Переходим к случаю произвольного полулокального Λ. Воспользовавшись разложением (1) мы здесь имеем

$$M(n,\overline{\Lambda}) = M(m_1 n, T_1) \oplus \ldots \oplus M(m_l n, T_l).$$

Последнее даст нам

$$GL^{\circ}(n,\overline{\Lambda}) = GL^{\circ}(m_1 n, T_1) \times \ldots \times GL^{\circ}(m_l n, T_l).$$

Пусть $det_k^{\circ} : GL^{\circ}(m_k n, T_k) \to c(T_k^{\circ})$ – квазиопределители, построенные выше для тел $T_k\ (k = 1,\ldots,l)$. Пусть далее, $\bar{x}$ – произвольный элемент из $GL^{\circ}(n,\overline{\Lambda})$ и $\bar{x} =$ $\bar{x}_1 \circ \ldots \circ \bar{x}_l$ – его разложение на сомножители $\bar{x}_k \in GL^{\circ}(m_k n, T_k)$. Здесь мы составим следующую цепочку эпиморфизмов

$$GL^{\circ}(n,\Lambda) \xrightarrow{-} GL^{\circ}(n,\overline{\Lambda}) = GL^{\circ}(m_1 n, T_1) \times \ldots \times GL^{\circ}(m_l n, T_l) \xrightarrow{\sigma} c(T_1^{\circ}) \times \ldots \times c(T_l^{\circ}),$$

$$x \xrightarrow{-} \bar{x} = \bar{x}_1 \circ \ldots \circ \bar{x}_l \xrightarrow{\sigma} det_1^{\circ}\, \bar{x}_1 \circ \ldots \circ det_l^{\circ}\, \bar{x}_l. \qquad (2.7)$$

Квазиопределитель, построенный на этапе I, на общий случай распространяем как композицию эпиморфизмов из (2.7)

$$det^{\circ} = \sigma \circ {}^{-} : GL^{\circ}(n,\Lambda) \to c(T_1^{\circ}) \times \ldots \times c(T_l^{\circ}) = G(\Lambda),\ x \to det_1^{\circ}\, \bar{x}_1 \circ \ldots \circ det_l^{\circ}\, \bar{x}_l.$$

И здесь det° – эпиморфизм по определению. Если обозначить через $\boldsymbol{0}$ единицу из $G(\Lambda)$, то специальная часть из $GL^{\circ}(n,\Lambda)$ выделяется как группа матриц x, для которых $det^{\circ}\, x = \boldsymbol{0}$. Обозначим через $S(\Lambda_i^{\circ},\Lambda_j^{\circ}),\ j \neq i \sim j,$ множество тех упорядоченных пар $<\varepsilon,\sigma>$ из $\{\Lambda_i^{\circ} \setminus (J \circ [\Lambda_i^{\circ},\Lambda_i^{\circ}])\} \times \{\Lambda_j^{\circ} \setminus (J \circ [\Lambda_j^{\circ},\Lambda_j^{\circ}])\},$ вторые компоненты которых удовлетворяют равенству $d_j(\bar{\sigma}) = d_j(\bar{\varepsilon}')$.

Покажем, что группа $SL^{\circ}(n,\Lambda)$ содержит в себе матрицы

$$t_{ij}(\alpha),\ \alpha \in \Lambda_{ij},\ j \neq i \sim j;\quad d_r(\tau),\ \tau \in J \circ [\Lambda_r^{\circ},\Lambda_r^{\circ}]; \qquad (2.8)$$
$$d_{ik}(\varepsilon,\sigma),\ <\varepsilon,\sigma> \in S(\Lambda_i^{\circ},\Lambda_k^{\circ}),\ i \sim k \in S\ \ (1 \leq i,r,j \leq mn),$$

и порождается ими. То, что матрицы $d_r(\tau)$ входят в $SL^{\circ}(n,\Lambda)$, – очевидно. Пусть $t_{ij}(\alpha)$ – произвольная квазитрансвекция из (2.8). Пусть далее, k – номер диагональной клетки из правой части (1), для которого $i \overset{k}{\sim} j\ (1 \leq k \leq l)$. Применение к последней матрице известных фактов теории определителей Дьёдонне, а также соотношений (2.6) и (T), тогда, дает нам следующие импликации

$$E + t_{ij}(\bar{\alpha}) \in SL(m_k n, T_k) \to det_k(E + t_{ij}(\bar{\alpha})) = [T_k^{\cdot}, T_k^{\cdot}] \to 1 + det_k^{\circ}(t_{ij}(\bar{\alpha})) =$$
$$1 + [T_k^{\circ}, T_k^{\circ}] \to \sigma(t_{ij}(\bar{\alpha})) = det_k^{\circ}(t_{ij}(\bar{\alpha})) = [T_k^{\circ}, T_k^{\circ}].$$

А это означает, что $det^{\circ}(t_{ij}(\alpha)) = \sigma(t_{ij}(\bar{\alpha})) = det_k^{\circ}(t_{ij}(\bar{\alpha})) = \boldsymbol{0}$, т.е. $t_{ij}(\alpha)$ принадлежит к $SL^{\circ}(n,\Lambda)$. Переходим к рассмотрению матриц $d_{ik}(\varepsilon,\sigma)$. Для номера r, $i \overset{r}{\sim} k\ (1 \leq r \leq l)$, используя в нужных местах соотношение (2.6) производим следующие вычисления

$$1 + det_r^{\circ}\{\overline{d_{ik}(\varepsilon,\sigma)}\} = 1 + det_r^{\circ}\{d_{ik}(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}')\} = det_r\{E + d_{ik}(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}')\} =$$

$det_r\{(E+d_i(\bar\varepsilon))(E+d_k(\bar\varepsilon'))\}=det_r\{E+d_i(\bar\varepsilon)\}det_r\{E+d_k(\bar\varepsilon')\}=$
$\{1+det_r^\circ(d_i(\bar\varepsilon))\}\{1+det_r^\circ(d_i(\bar\varepsilon'))\}=\{1+det_r^\circ(d_i(\bar\varepsilon))\}\{1+(det_r^\circ(d_i(\bar\varepsilon))'\}=1+[T_r^\circ, T_r^\circ],$

т.е. будем иметь $det_r^\circ\{\overline{d_{ik}(\varepsilon,\sigma)}\}=\boldsymbol{0}$. По определению det° это означает, что $det\{d_{ik}(\varepsilon,\sigma)\}=\sigma\{\overline{d_{ik}(\varepsilon,\sigma)}\}=det_r^\circ\{\overline{d_{ik}(\varepsilon,\sigma)}\}=\boldsymbol{0}$, т.е. и $d_{ik}(\varepsilon,\sigma)\in SL^\circ(n,\Lambda)$.

Покажем теперь, что группа $SL^\circ(n,\Lambda)$ порождается матрицами (2.8). Пусть D_S обозначает квазипроизведение некоторых матриц вида

$$d_{ik}(\varepsilon,\sigma),\quad i\sim k\in S, \qquad (d_{ik})$$

из (2.8) с неповторяющимися первыми индексами его букв (т.е. буквы вида (d_{ik}) с одинаковыми первыми индексами входят в D_S не более одного раза). Пусть далее, $J(D_S)$ означает множество первых индексов всех букв $d_{ik}(\varepsilon,\sigma)$, содержащихся в D_S. Квазипроизведение $d_1(\sigma_1)\circ d_2(\sigma_2)\circ\ldots\circ d_{mn}(\sigma_{mn})$ (также букв из (8)) будем называть *согласованным* со словом D_S, если для них

$$i\in J(D_S)\to\sigma_i=0\,.$$

Пусть $x-$произвольная матрица из $SL^\circ(n,\Lambda)\ (n\ge 2)$. Как было показано в [13], матрицу x (как и остальные элементы из $GL^\circ(n,\Lambda)$) можно представить в виде $x=t\circ D\circ t_1$, где t,t_1-некоторые слова, составленные из квазитрансвекций $t_{ij}(\alpha)$, а $D=diag(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{mn})-$расширенная диагональная матрица ($\varepsilon_i\in\Lambda_i^\circ$). Легко убедится, что квазиумножения D справа на некоторые матрицы вида (d_{ik}) приведут нас к разложению этого сомножителя $D=d\circ D_S$, где $d=d_1(\sigma_1)$ $\circ d_2(\sigma_2)\circ\ldots\circ d_{mn}(\sigma_{mn})-$диагональное слово, согласованное с D_S и для которого $\sigma_k\in J\circ[\Lambda_k^\circ,\Lambda_k^\circ]$ при всех $k\notin S$. Поскольку здесь $x,t,D_S,t_1\in SL^\circ(n,\Lambda)$, мы имеем $d\in SL^\circ(n,\Lambda)$. Последнее включение влечет за собой $det^\circ d=det^\circ\{d_1(\sigma_1)\}\circ$ $det^\circ\{d_2(\sigma_2)\}\circ\ldots\circ det^\circ\{d_{mn}(\sigma_{mn})\}=\boldsymbol{0}$. Опуская в полученном равенстве сомножители $det^\circ\{d_k(\sigma_k)\},\ k\notin S$ (ибо их аргументы принадлежат к $J\circ[\Lambda_k^\circ,\Lambda_k^\circ]$), мы приходим к $det^\circ d=\sigma\{d_a(\bar\sigma_a)\circ d_b(\bar\sigma_b)\circ\ldots\circ d_c(\bar\sigma_c)\}=det_1^\circ\{d_a(\bar\sigma_a)\}\circ det_2^\circ\{d_b(\bar\sigma_b)\}\circ\ldots$ $\circ det_l^\circ\{d_c(\bar\sigma_c)\}=\boldsymbol{0}$, т.е.

$$\bar\sigma_a\in[T_1^\circ,T_1^\circ],\ \bar\sigma_b\in[T_2^\circ,T_2^\circ],\ldots,\bar\sigma_c\in[T_l^\circ,T_l^\circ]. \qquad (2.9)$$

Пусть теперь $k\in I(m)$ и $k\overset{q}{\sim}k\ (1\le q\le l)$. Обозначим через C_k полный прообраз подгруппы $[T_q^\circ,T_q^\circ]\bar e_{kk}\le\overline{\Lambda}_k^\circ$ при эпиморфизме (2.2). Покажем, что

$$C_k=J\circ[\Lambda_k^\circ,\Lambda_k^\circ]. \qquad (2.10)$$

Включение $\supseteq$ здесь очевидно. Покажем его в другую сторону. Пусть y — произвольный элемент из C_k. Для него мы имеем представление $\bar y=[\bar y_1,\bar z_1]^\circ\circ$ $\ldots\circ[\bar y_s,\bar z_s]^\circ,\ \bar y_i,\bar z_i\in T_q^\circ$. Взяв произвольно вычеты $y_i\in\bar y_i,\ z_i\in\bar z_i,\ i=1,\ldots,s,$ составим элемент $z=[y_1,z_1]^\circ\circ\ldots\circ[y_s,z_s]^\circ\in[\Lambda_k^\circ,\Lambda_k^\circ]$. Поскольку здесь $\overline{y\circ z'}=\bar{y}\circ\overline{z'}=\bar{y}\circ\bar{z}'=\bar{0}$, мы имеем $y\circ z'=\boldsymbol{a}\in J$. А это означает, что $y=\boldsymbol{a}\circ z\in J\circ[\Lambda_k^\circ,\Lambda_k^\circ]$ и включение $\subseteq$ доказано. Тогда, как показывают (2.9) и равенство (2.10), для аргументов $\sigma_k,\ k\in S$, разложения $d=d_1(\sigma_1)\circ d_2(\sigma_2)\circ\ldots\circ d_{mn}(\sigma_{mn})$ также имеют место включения $\sigma_k\in J\circ[\Lambda_k^\circ,\Lambda_k^\circ]$. Итак, матрица x разложена в квазипроизведение конечного числа букв из (8) и тем самым порождаемость группы $SL^\circ(n,\Lambda)$ этой системой установлена.

Для представления обобщенной специальной линейной группы $SL^\circ(n,\Lambda), n\geq 2,$ над полулокальным $\Lambda-$главного объекта настоящей работы, мы и используем алфавит (2.8).

§3. Соотношения группы $SL^\circ(n,\Lambda)$

Прежде чем приступить к написанию этих соотношений примем следующие соглашения. Пусть $\{e_{ij}\}_{i\sim j},\ i,j\in I(m),$ означает какую-нибудь фиксированную систему прообразов матричных единиц $\bar{e}_{ij}$ из правой части (2.1) при эпиморфизме (2.2). Эту систему на произвольные пары $i,j,i\sim j,$ из $I(mn)$ распространяем пра-вилом $e_{ij}=e_{r(i),r(j)}$ и для краткости положим $e_{ii}=e_i$. Далее, квазитрансвекцию $t_{ij}(\alpha)$ будем называть *диагональной*, если для нее $\alpha\equiv 0$ при $p(i)=p(j)$ и $\alpha=0$ при $p(i)\neq p(j)$. В противном случае она называется *недиагональной.* В работе мы под записью $d_{is}[\sigma,\tau]$, где $i<s\sim i$, $\sigma\in\Lambda_i^\circ$, и $\tau-$ элемент из Λ_s° такой, что $d_s(\bar{\tau}')=d_s(\bar{\sigma})$, условимся понимать букву $d_{is}(\sigma,\tau)$, если $\sigma\notin J\circ[\Lambda_i^\circ,\Lambda_i^\circ]$, и слово $d_i(\sigma)\circ d_s(\varepsilon),\varepsilon=\tau+[\sigma']_{is}\tau$, в противном случае. Ниже все квазитрансвекции, вхо-дящие в левые части серий 8–15, считаются недиагональными, а диагональные же буквы вида $d_r(\sigma)$ из левых частей 1, 2 и 7, 8 – отличными от нуля.

Для группы $SL^\circ(n,\Lambda)$ в алфавите (2.8) имеют место следующие соотно-шения:

1. $d_i(\varepsilon)\circ d_i(\mu)=d_i(\varepsilon\circ\mu);$

2. $d_i(\varepsilon)\circ d_k(\mu)=d_k(x)\circ d_i(\varepsilon),\ i\neq k,$где $x=\mu+[\varepsilon\mu+\mu\varepsilon'+\varepsilon\mu\varepsilon']_{ik};$

3. $d_{ir}(\varepsilon,\sigma)=d_{ik}(x,y)\circ d_{rk}(\sigma,\mu),\ r\notin S,\ r\sim k\in S,$

где $x=\varepsilon+\varepsilon([\sigma]_{ir}+[\mu]_{ik})'(\equiv\varepsilon),\ y=[\sigma]_{kr}\circ(\mu+[\sigma]_{kr})'(\equiv\mu')$ ($\mu-$произвольный элемент из Λ_k°, для которого $d_k(\bar{\mu})=d_k(\bar{\sigma}')$);

4. $d_{ij}(\varepsilon,\sigma)\circ d_{ij}(\tau,\mu)=d_j([\sigma',\mu']^\circ)\circ d_{ij}[\varepsilon\circ\tau,x],\ j\in S,$

где $x=[\mu',\sigma']^{\circ}\circ a+[\mu',\sigma']^{\circ}[\varepsilon\circ\tau]_{ij}\ (\equiv\tau'\circ\varepsilon'),\ a=\sigma\circ\mu+[\varepsilon\mu+\sigma\tau]_{ij};$

5. $d_{ij}(\varepsilon,\sigma)\circ d_{kj}(\tau,\mu)=d_{kj}(x,\mu)\circ d_{ij}(y,\sigma)\circ d_j([\sigma,\mu]^{\circ}),\ j\in S,\ i\neq k,$

где $x=d+d([\sigma]_{kj}+[y]_{ik})'(\equiv\tau),\ y=c+[\mu']_{ij}c\ (\equiv\varepsilon),\ c=a+[a]_{ij}[\mu,\sigma]^{\circ},\ d=b+$ $[b]_{kj}[\mu,\sigma]^{\circ},\ a=\varepsilon+\varepsilon[\mu]_{ij},\ b=\tau+([\varepsilon]_{ik}+[\sigma]_{kj})\tau;$

6. $d_{ik}(\varepsilon,\sigma)\circ d_{rj}(\tau,\mu)=d_{rj}(x,y)\circ d_{ik}(\varepsilon,\sigma),\ \ k,j\in S,\ k\neq j\ (\rightarrow i\neq r),$

где $x=a\circ\tau\circ a'(\equiv\tau),\ y=b\circ\mu\circ b'(\equiv\mu),\ a=[\varepsilon]_{ir}+[\sigma]_{kr},\ b=[\varepsilon]_{ij}+[\sigma]_{kj};$

7. $d_k(\tau)\circ d_{ij}(\varepsilon,\sigma)=d_{ij}(\varepsilon,\sigma)\circ d_k(x),\ j\in S,\ k\neq i,$

где $x=a'\circ\tau\circ a\ (\equiv\tau),\ a=[\varepsilon]_{ki}+[\sigma]_{kj};$

8. $t_{ij}(\alpha)\circ d_k(\varepsilon)=d_k(\varepsilon)\circ t_{ij}(x),$

где $x=\alpha+\alpha[\varepsilon]_{kj}+[\varepsilon']_{ik}\alpha+[\varepsilon']_{ik}\alpha[\varepsilon]_{kj};$

9. $t_{ij}(\alpha)\circ d_{rk}(\varepsilon,\sigma)=d_{rk}(\varepsilon,\sigma)\circ t_{ij}(x),\ k\in S,$

где $x=\alpha+\alpha b+a'(\alpha+\alpha b),\ a=[\varepsilon]_{ir}+[\sigma]_{ik},\ b=[\varepsilon]_{rj}+[\sigma]_{kj};$

10. $t_{ij}(\alpha)\circ t_{ij}(\beta)=t_{ij}(\alpha+[\alpha\beta]_{ij}+\beta);$

11. $t_{ir}(\alpha)\circ t_{rj}(\beta)=d_r(\tau)\circ t_{ij}(z)\circ t_{rj}(y)\circ t_{ir}(x),\ i\neq j,$

где $x=(-\alpha-\sigma'\alpha)^*(\equiv\alpha),\sigma=[\alpha]_{ir}+[\alpha\beta]_{ij},\ y=(-\beta-\mu'\beta)^*(\equiv\beta),\ \ \mu=\tau+[\beta]_{rj},$ $\tau=[\beta]_{ij}x^*(\equiv 0),\ z=(-\gamma-\eta'\gamma)^*(\equiv\alpha\beta),\gamma=\alpha\beta+[\alpha\beta]_{rj}y^*,\ \ \eta=[\tau]_{ir}+[\gamma]_{ij};$

12. $t_{iq}(\alpha)\circ t_{rj}(\beta)=t_{rq}(\boldsymbol{в})\circ t_{rj}(y)\circ t_{ij}(\boldsymbol{a})\circ t_{iq}(x),\ q\neq r,\ i\neq j,\ |\{i,q,r,j\}|\geq 3,$

где $x=(-\alpha-\sigma'\alpha)^*,\ \sigma=[\alpha]_{iq}+[\alpha]_{qr}[\beta]_{ij},\ \boldsymbol{a}=(-a-\tau'a)^*(\equiv 0),\ a=[\alpha\beta]_{qr},\ \tau=[\alpha]_{qr}$ $[\beta]_{ij},\ y=(-c-\mu'c)^*,\ c=\beta+([\beta]_{ij}+[\boldsymbol{в}]_{iq})\boldsymbol{a}^*,\ \mu=[\boldsymbol{в}]_{qr}+[c]_{rj},\ \boldsymbol{в}=[\beta]_{ij}x^*(\equiv 0);$

13. $t_{iq}(\boldsymbol{a})\circ t_{ij}(\alpha)=t_{ij}(\alpha)\circ t_{iq}(\boldsymbol{a}+\alpha'\boldsymbol{a}),\ p(j)=p(i)\neq p(q),\ \boldsymbol{a}\equiv 0,\ \alpha\not\equiv 0,\ \alpha\boldsymbol{a}\neq 0;$

14. $t_{is}(\alpha)\circ t_{si}(\beta)=d_{is}[\sigma,\tau]\circ t_{si}(y)\circ t_{is}(x),\ i<s,\ \alpha\beta\not\equiv -e_i,$

где $x=(-\alpha-\sigma'\alpha)^*,\ \ y=(-\beta-\chi'\beta)^*,\sigma=\alpha\beta,\ \chi=([\alpha]_{is}+\beta)x^*,\ \tau=\chi+[\sigma+\beta]_{is}y^*;$

15. при $m>1$ и для $\boldsymbol{a}\equiv 0$

$$t_{ij}(\boldsymbol{a})=\begin{cases} d_k(\boldsymbol{a}), & \textit{если}\ \ p(i)=p(j),\ k-\textit{любой номер, для которого}\ p(k)=p(i),\\ t_{mp(i),mp(j)}(\boldsymbol{a}), & \textit{если}\ \ p(i)\neq p(j)\ \ \textit{и}\ \ <i,j>\neq<mp(i),mp(j)>;\end{cases}$$

16. для индексов $i<s,\ |\overline{\Lambda}_i|=2$

$$t_{is}(e_{is})\circ t_{si}(e_{si})\circ t_{is}(e_{is})\circ t_{si}(e_{si}) = d_i(\sigma)\circ d_s(\varepsilon)\circ t_{si}(y)\circ t_{is}(x),$$

где $\sigma = 3e_{is}e_{si} + (e_{is}e_{si})^2 (\equiv 0)$, $x = (-a - \sigma' a)^* (\equiv e_{is})$, $y = (-b - \chi' b)^* (\equiv e_{si})$, $\chi = c + (b + [a + c]_{is})x^*$, $\varepsilon = \mu + [\sigma']_{is}\mu$, $\mu = \chi + [\sigma + b]_{is} y^* (\equiv 0)$, $a = 2e_{is} + e_{is}e_{si}e_{is}$, $b = 2e_{si} + e_{si}e_{is}e_{si}$, $c = e_{si}e_{is} + [e_{is}^2 + e_{is}e_{si}^2 + e_{si}^2 + e_{is}^2 e_{si}]_{is}$.

В приведенном списке соотношения 1, 10, 15 очевидны. Правильность соотношений 2, 8, 9, 11–14 и 16 без существенных изменений устанавливается как в [13]. Что касается серий 3–7, то их правильность проверяется идентичным образом. Здесь мы продемонстрируем вывод, выборочно, соотношений 5. Действительно, исходя из левой части 5 и используя принятые там обозначения можно произвести следующие вычисления

$$d_{ij}(\varepsilon,\sigma)\circ d_{kj}(\tau,\mu) = d_{ij}(\varepsilon,\sigma) + d_{ij}(\varepsilon,\sigma)d_{kj}(\tau,\mu) + d_{kj}(\tau,\mu) = d_i(a) + d_k(b) + d_j(\sigma\circ\mu) =$$

$$[\{d_i(a) + d_k(b) + d_j(\sigma\circ\mu)\}\circ d_j([\mu,\sigma]^\circ)]\circ d_j([\sigma,\mu]^\circ) = [d_i(a) + d_k(b) + d_j(\sigma\circ\mu) +$$

$$\{d_i(a) + d_k(b) + d_j(\sigma\circ\mu)\}d_j([\mu,\sigma]^\circ) + d_j([\mu,\sigma]^\circ)]\circ d_j([\sigma,\mu]^\circ) =$$

$$[d_i(c) + d_k(d) + d_j(\mu\circ\tau)]\circ d_j([\sigma,\mu]^\circ) = d_{kj}(d + d([\sigma]_{kj} + [y]_{ik})', \mu)\circ d_{ij}(y,\sigma)\circ$$

$$d_j([\sigma,\mu]^\circ) = d_{kj}(x,\mu)\circ d_{ij}(y,\sigma)\circ d_j([\sigma,\mu]^\circ).$$

Конечные звенья полученной цепочки показывают, что соотношения 5 были верными.

§4. Производные разложения

Наши рассуждения в этой главе помимо основных соотношений 1–16 используют и некоторые следствия из них (ниже они будут пронумерованы через (11)–(21)). Прежде чем сформулировать их, примем следующие соглашения. Ниже мы под $*$ (с индексами и без них) условимся понимать некоторые элементы из Λ_{ij}, принимающие вообще говоря различные значения на разных местах (ин-дексы i,j определяются по контексту). Аналогичным образом $\cdot$ будет обозначать некоторые радикальные элементы. Далее, для слов W, V алфавита (2.8) запись $[{}^W_V]$ будет означать одно из этих слов: W или V. Введем к рассмотрению также матрицы (is), $i < s \sim i$ $(i,s \in I(mn))$, определенные как

$$t_{is}(\chi)\circ t_{si}(\pi)$$

где аргументы $\pi,\ \chi$ удовлетворяют сравнениям $\chi\pi\equiv -e_i$. Введенные ("внутренние") матрицы (is) в наших рассуждениях будут играть роль обычных матриц-транспозиций. Их мы для равных индексов доопределяем как $(ii)=0$.

Упомянутые выше производные разложения таковы:

$$t_{si}(\beta)\circ t_{is}(\alpha)=d_{is}[*,\ *]\circ t_{is}(*)\circ t_{si}(*),\quad i<s,\ \beta\alpha\not\equiv -e_s; \tag{2.11}$$

$$t_{rj}(\beta)\circ t_{ir}(\alpha)=d_r(\cdot)\circ t_{ij}(\overbrace{-\alpha\beta})\circ t_{ir}(\overbrace{\alpha})\circ t_{rj}(\overbrace{\beta}),\quad j\neq i; \tag{2.12}$$

$$(is)\circ d_k(\varepsilon)=d_k(\varepsilon)\circ(is),\quad i<s; \tag{2.13}$$

$$(is)\circ d_{kr}(\varepsilon,\sigma)=d_{kr}(\varepsilon,\sigma)\circ(is),\ i<s; \tag{2.14}$$

$$(is)\circ t_{is}(\alpha)=d_{is}[*,*]\circ t_{si}(*)\circ(is),\quad i<s; \tag{2.15}$$

$$(is)\circ t_{si}(\alpha)=d_{is}[*,*]\circ t_{si}(*)\circ\begin{bmatrix} t_{is}(*) \\ (is) \end{bmatrix},\quad i<s; \tag{2.16}$$

$$(is)\circ t_{ij}(\alpha)=d_i(\cdot)\circ d_s(\cdot)\circ t_{sj}(\overbrace{\chi\alpha})\circ t_{ij}(\cdot)\circ(is),\quad i<s\neq j; \tag{2.17}$$

$$(is)\circ t_{sj}(\alpha)=d_i(\cdot)\circ d_s(\cdot)\circ t_{ij}(\overbrace{\pi\alpha})\circ t_{sj}(\cdot)\circ(is),\ j\neq i<s; \tag{2.18}$$

$$(is)\circ t_{ji}(\alpha)=d_i(\cdot)\circ d_s(\cdot)\circ t_{js}(\overbrace{-\alpha\pi})\circ t_{ji}(\cdot)\circ(is),\ i<s\neq j; \tag{2.19}$$

$$(is)\circ t_{js}(\alpha)=d_i(\cdot)\circ d_s(\cdot)\circ t_{ji}(\overbrace{-\alpha\chi})\circ t_{js}(\cdot)\circ(is),\quad j\neq i<s; \tag{2.20}$$

$$(is)\circ t_{rj}(\alpha)=d_i(\cdot)\circ d_s(\cdot)\circ t_{rj}(\overbrace{\alpha})\circ t_{ri}(\cdot)\circ t_{rs}(\cdot)\circ t_{sj}(\cdot)\circ t_{ij}(\cdot)\circ(is), \tag{2.21}$$

где $i<s$ и $\{i,\ s\}\cap\{r,\ j\}=\varnothing$.

В приведенных разложениях квазитрансвекции, входящие в левые части, считаются недиагональными, а буква $d_k(\varepsilon)$ из (2.13) – ненулевой. Уже из самого составления (2.11)–(2.21) нетрудно догадаться, что при применениях нас будут интересовать лишь структурные строения их правых частей. Зависимость разло-жений (2.11) – (2.21) от соотношений 1– 16 показывается как в [13] и повтор-яющиеся детали здесь мы опускаем. Как показывают выводы (15) (см.

[4]) и (16), транспозиционные матрицы (is) в (13)–(21), находящиеся на разных сторонах этих разложений, не только не совпадают, но могут иметь даже различные структурные строения.

§5. Центральные леммы

Этот параграф является одним из ключевых при доказательстве основного результата главы. Введем на множестве всех слов алфавита (8) отношения $\overset{i}{\underset{\sim}{\rightarrow}}$, $1 \le i < mn$: $W \overset{i}{\underset{\sim}{\rightarrow}} V$ тогда и только тогда, когда эти слова связаны соотношением $W = X \circ V$, где $X -$некоторое слово, не содержащее недиагональные выражения вида (kj), $t_{kj}(\alpha)$, $k < j$, для которых $k \le i$.

Введенные отношения $\overset{i}{\underset{\sim}{\rightarrow}}$ являются рефлексивными и транзитивными. Пусть для индекса $i, 1 \le i < mn, Q_i = \{ t \in I(mn): \ i \ne t \sim i \}$ и $P_i = \{ t \in I(mn): \ i < t \sim i \}$. Введем к рассмотрению теперь следующие формы $\Omega_i = \prod_{q \in Q_i} t_{iq}(\alpha_q)$ и $F_i = \prod_{p \in P_i} t_{ip}(\alpha_p)$ (здесь умножения – квази-умножения и порядок следования сомножителей несущественен). Если в форме F_i буква $t_{ik}(\alpha_k)$– нулевая, то это мы будем подчеркивать как $F_i(\ne k)$. Аналогичный смысл придается и записи $F_i(\ne k, r)$. Обозначим далее, через $I(\Omega_i)$ число ненулевых букв из Ω_i (т.е. длину этой формы).

Наши дальнейшие рассуждения используют следующие три леммы.

Лемма 1. *Пусть нам задана форма $\Omega_i = t_{ik}(\alpha_k) \circ t_{ir}(\alpha_r) \circ \ldots \circ t_{ij}(\alpha_j)$, где $I(\Omega_i) \ge 1$ и все ее буквы отличны от нуля. Пусть далее, $s, p, \ldots, q$–произвольная перестановка из чисел $k, r, \ldots, j$. Тогда для них применяя соотношения* 8, 10, 12, 13 *и* 15 *можно выполнить преобразование*

$$\Omega_i = t_{is}(\overbrace{\alpha_s}) \circ t_{ip}(\overbrace{\alpha_p}) \circ \ldots \circ t_{iq}(\overbrace{\alpha_q})$$

(т.е. сохраняя сравнимость аргументов как-угодно можно переставлять сомножители из Ω_i).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы очень просто следует из соотношений структурной перестановочности

$$t_{ia}(\alpha)\circ t_{ib}(\beta)=t_{ib}(\overset{\frown}{\beta})\circ t_{ia}(\overset{\frown}{\alpha}),\ a\neq b, \tag{2.22}$$

являющихся следствиями от фигурировавших в формулировке соотношений. Покажем, что (2.22) действительно следует из них. Если обе буквы $t_{ia}(\alpha), t_{ib}(\beta)$ – диагональны, то $\alpha\equiv\beta\equiv 0$ и они "переставляются" как $t_{ia}(\alpha)\circ$ $t_{ib}(\beta)=t_{ib}(\alpha)\circ t_{ia}(\beta)$ согласно 15. Если же диагональна только одна из них, то перестановка (2.22) осуществляется при помощи 15 и 8.

Пусть теперь обе $t_{ia}(\alpha), t_{ib}(\beta)$ – недиагональны. Применяя к слову $V =$ $t_{ia}(\alpha)\circ t_{ib}(\beta)$ соотношения 12 и 10 приведем его к виду

$$V=t_{ia}(\mathbf{b})\circ[t_{ib}(\overset{\frown}{\beta})\circ t_{ib}(\mathbf{a})]\circ t_{ia}(\overset{\frown}{\alpha})=[t_{ia}(\mathbf{b})\circ t_{ib}(\overset{\frown}{\beta})]\circ t_{ia}(\overset{\frown}{\alpha}). \tag{2.23}$$

Если в последнем члене (2.23) хотя бы одна из $t_{ia}(\mathbf{b})$ и $t_{ib}(\overset{\frown}{\beta})$ – диагональна, (так будет, например, при $p(a)=p(i)$ или же, когда $p(b)\neq p(i)$, см. формулы соот-ношений 12), то установленный выше факт и 10 дают нам $V=t_{ib}(\overset{\frown}{\beta})\circ$ $[t_{ia}(\cdot)\circ t_{ia}(\overset{\frown}{\alpha})]=t_{ib}(\overset{\frown}{\beta})\circ t_{ia}(\overset{\frown}{\alpha})$. Исключая этот случай из рассмотрения, для тех же букв $t_{ia}(\mathbf{b}), t_{ib}(\overset{\frown}{\beta})$ мы теперь имеем следующие две возможности: $\overset{\frown}{\beta}\mathbf{b}=0$ и $\overset{\frown}{\beta}\mathbf{b}\neq 0$. Если здесь $\overset{\frown}{\beta}\mathbf{b}=0$, то применяя (ко второму выделенному отрезку в (2.23)) соотношения 12 (точнее их формулы), находим $\sigma=[\mathbf{b}]_{ia}+[\mathbf{b}]_{ai}[\beta]_{ib}$ $=0$ (ибо $p(a)\neq p(i)$) и $[\overset{\frown}{\beta}]_{ib}x^{*}=-\overset{\frown}{\beta}(\mathbf{b}+\sigma'\mathbf{b})=0$, т.е. в этом случае используя еще 10 мы будем иметь $V=t_{ib}(\overset{\frown}{\beta})\circ[t_{ia}(\cdot)\circ t_{ia}(\overset{\frown}{\alpha})]=t_{ib}(\overset{\frown}{\beta})\circ t_{ia}(\overset{\frown}{\alpha})$. А если же $\overset{\frown}{\beta}\mathbf{b}\neq 0$ (напомним, что здесь $p(b)=p(i)\neq p(a)$), то применение 13 и 10 снова приводит нас к $V=t_{ib}(\overset{\frown}{\beta})\circ[t_{ia}(\cdot)\circ t_{ia}(\overset{\frown}{\alpha})]=t_{ib}(\overset{\frown}{\beta})\circ t_{ia}(\overset{\frown}{\alpha})$. Итак, во всех случаях (22) действительно будет следовать из 8, 10, 12, 13 и 15.

Лемма 2. *Для любой ненулевой квазитрансвекции* $t_{rq}(\beta), r, q\neq i$, *для* *которой выполнено неравенство* $r > q$ *при* $r < i$, *и произвольной формы* $F_i(\neq r,q) = \prod_{k \in P_i} t_{ik}(\alpha_k)$ *используя соотношения* 8, 10, 12, 13 *и* 15 *можно выполнить преобразование*

$$F_i(\neq r,q) \circ t_{rq}(\beta) \overset{i}{\underset{\sim}{\to}} \tilde{F}_i(\neq r,q) \circ t_{iq}(\cdot),$$

где $\tilde{F}_i(\neq r,q) = \prod_{k \in P_i} t_{ik}(\overset{\frown}{\alpha_k})$ *– некоторая форма, для которой* $\alpha_k = 0 \to \overset{\frown}{\alpha_k} = 0$ *при всех* $k \in P_i$.

Доказательство леммы проводится индукцией по длине формы $F_i(\neq r,q)$ с использованием только что доказанной леммы 1. Оно содержится в работе [14].

Лемма 3. *Пусть задана форма* $F_i(\neq r) = \prod_{k \in P_i} t_{ik}(\alpha_k),\ r \in P_i$. *Тогда для любой ненулевой буквы* $t_{ri}(\alpha)$ *используя соотношения* 8, 10, 12, 13, (12) *и* 15 *можно выполнить преобразование*

$$F_i(\neq r) \circ t_{ri}(\alpha) \overset{i}{\underset{\sim}{\to}} \tilde{F}_i(\neq r),$$

где $\tilde{F}_i(\neq r) = \prod_{k \in P_i} t_{ik}(\overset{\frown}{\alpha_k})$ *– некоторая форма, для которой также* $\alpha_k = 0 \to \overset{\frown}{\alpha_k} = 0$ *при всех* $k \in P_i$.

Доказательство этой леммы опирается на леммы 1, 2 и проводится также индукцией по длине формы $F_i(\neq r)$. Оно в полном объеме приведено в [14] и мы здесь повторяющиеся подробности опускаем.

§6. Строчная трансформация букв

Введем теперь к рассмотрению формы $f_i = F_i(\neq s)$, где $s \geq i$ и $1 \leq i < mn$ (ясно, что при $s = i$ $F_i(\neq s)$ – это обычная форма F_i). Эти слова f_i будем называть *гори-зонтальными формами* ступени i.

Наши дальнейшие рассуждения используют соотношения

$$t_{rj}(\gamma) \circ t_{ij}(\delta) = [t_{ij}(\cdot) \circ t_{ij}(\overset{\frown}{\delta})] \circ [t_{rj}(\cdot) \circ t_{rj}(\overset{\frown}{\gamma})] = t_{ij}(\overset{\frown}{\delta}) \circ t_{rj}(\overset{\frown}{\gamma}),\ i \neq r, \quad (2.24)$$

вытекающие из 12 и 10.

Имеет место следующая

Теорема 1 (о строчной трансформации букв). *Пусть* f_i *– произвольная ненулевая горизонтальная форма ступени* $i,\ 1 \le i < mn,$ *и* x *означает либо диагональные буквы* $d_r(\tau),\ d_{pk}(\varepsilon,\sigma),$ *либо же недиагональную квазитрансвекцию* $t_{rj}(\alpha),$ *для которой при* $r < j$ *считается выполненным условие* $r \ge i.$
Для них применяя соотношения 1 – 16 *можно выполнить преобразование*

$$V = f_i \circ x \overset{i}{\tilde{\to}} \tilde{f}_i, \qquad (\overset{i}{\tilde{\to}})$$

где $\tilde{f}_i$ *– некоторая горизонтальная форма ступени* i *.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оно является комбинаторным и относительно формы $f_i = F_i(\ne s) \circ (is)$ различает следующие три случая: I. $x = d_r(\tau)$ или $x = d_{pk}(\varepsilon, \sigma);$ II. $x = t_{rj}(\alpha),\ s = i;$ III. $x = t_{rj}(\alpha),\ s > i$.

Первый случай показывается так. Пусть сначала $s = i$. Здесь мы применяя соотношения 8, 3 и 9 преобразование ($\overset{i}{\tilde{\to}}$) выполняем как $V = F_i \circ x = x \circ \tilde{F}_i \overset{i}{\tilde{\to}} \tilde{F}_i$. Если же $s > i,$ то используя разложения (13), (14), а также разобранный только что случай $s = i,$ будем иметь $V = F_i(\ne s) \circ [(is) \circ x] = [F_i(\ne s) \circ x] \circ (is) = x \circ \tilde{F}_i(\ne s) \circ (is) \overset{i}{\tilde{\to}} \tilde{F}(\ne s) \circ (is) = \tilde{f}_i.$

В случаях II и III доказательство проводится дословным повторением теоремы 1 из [14]. Оно использует соотношения 3, 8 – 11, 14, (2.13) – (2.21), (2.24), разобранный выше случай I, а также леммы 1 – 3. Эти повторяющиеся подробности мы также опускаем.

§7. Представимость в стандартном виде

Наш метод и здесь использует стандартные формы элементов из $SL^{\circ}(n, \Lambda)$. Они вводятся следующим образом. Для индексов $i, 1 \le i < mn,$ наряду с формами f_i (см. первую часть) вводим также *вертикальные формы* $g_i = \prod_{p \in P_i} t_{pi}(\beta_p)$ ступени i. Ниже записи $g_i(\ne k), g_i(\ne k, r)$ будут означать, что в форме g_i $\beta_k = 0$ и $\beta_k = \beta_r = 0$ соответственно. В качестве *стандартных форм* в $SL^{\circ}(n,\Lambda)$ мы объявляем всевозможные комбинации алфавита (8) вида

$$g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_{mn-1} \circ d \circ D_S \circ f_{mn-1} \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1, \qquad (sf)$$

где $d = d_1(\sigma_1) \circ d_2(\sigma_2) \circ \ldots \circ d_{mn}(\sigma_{mn}) -$ некоторое диагональное слово, согласованное с D_S (о слове D_S см. [§2], $S -$ наибольшая полная система вычетов множества $I(mn)$ относительно ~). Представления матриц из $SL^{\circ}(n,\Lambda)$ в виде (sf) вообще говоря не однозначны. В этом параграфе мы покажем, что используя соотношения 1–16 всякое слово алфавита (8) можно преобразовать к его стандарт-ному виду (sf). Установление этого факта наряду с теоремой 1 использует также столбцовую трансформационную теорему 2.

Рассмотрим следующий подалфавит

$$t_{ij}(\alpha), \alpha \in \Lambda_{ij}, \ j < i \sim j; \ d_r(\tau), \ \tau \in J \circ [\Lambda_r^{\circ}, \Lambda_r^{\circ}]; \ d_{ik}(\varepsilon,\sigma), \ <\varepsilon,\sigma> \in S(\Lambda_i^{\circ}, \Lambda_k^{\circ}), i < k \sim i$$
$$(1 \le i,k,r,j \le mn)$$

алфавита (8). На множестве всех слов этого под алфавита вводим отношения $\underset{i}{\overset{\sim}{\rightarrow}}, 1 \le i < mn: \ W \underset{i}{\overset{\sim}{\rightarrow}} V$ тогда и только тогда, когда эти слова связаны соотношением $W = V \circ Y$, где Y – некоторое слово (указанного под алфавита), не содержащее недиагональные квазитрансвекции вида $t_{pq}(\alpha), \ q \le i \ (p > q)$. Отношения $\underset{i}{\overset{\sim}{\rightarrow}}$ также рефлексивны и транзитивны.

Для наших дальнейших рассуждений нужны преобразования

$$V = t_{rj}(\alpha) \circ g_i(\ne j,r) \ \underset{i}{\overset{\sim}{\rightarrow}} t_{ri}(\cdot) \circ \tilde{g}_i(\ne j,r), \quad r > j > i, \qquad (2.25)$$

где $\tilde{g}_i(\ne j,r) -$ некоторая вертикальная форма ступени i (левый аналог леммы 2). Покажем (25) индукцией по длине $\boldsymbol{n}$ формы $g_i(\ne j,r)$. При $\boldsymbol{n} = 0$ положив $t_{ri}(\cdot) = \tilde{g}_i(\ne j,r) = 0,$ мы имеем базу для индукции. Считая далее $\boldsymbol{n} \ge 1$ и применяя соот-ношения 12, 10, а также предположение индукции, получаем

$$V = [t_{rj}(\alpha) \circ t_{si}(\overbrace{\alpha_s})] \circ \tilde{g}_i(\ne j,r,s) = t_{sj}(\boldsymbol{a}) \circ t_{si}(\overbrace{\alpha_s}) \circ t_{ri}(b) \circ [t_{rj}(\overbrace{\alpha}) \circ \tilde{g}_i(\ne j,r,s)] \underset{i}{\overset{\sim}{\rightarrow}}$$

$$t_{sj}(\boldsymbol{a}) \circ t_{si}(\overbrace{\alpha_s}) \circ [t_{ri}(b) \circ t_{ri}(\cdot)] \circ \tilde{g}_i(\ne j,r,s) = t_{sj}(\boldsymbol{a}) \circ t_{si}(\overbrace{\alpha_s}) \circ t_{ri}(\cdot) \circ \tilde{g}_i(\ne j,r,s).$$

Если в последней записи $t_{sj}(\boldsymbol{a})$– диагональна (так будет, например, когда $p(r) \neq p(i)$), то используя 15, 8, 9 и (24) будем иметь

$$V \underset{i}{\tilde{\to}} \ t_{sj}(\boldsymbol{a}) \circ [t_{si}(\overbrace{\alpha_s}) \circ t_{ri}(\cdot)] \circ \tilde{g}_i(\neq j,r,s)] = d_s(\boldsymbol{a}) \circ t_{ri}(\cdot) \circ [t_{si}(\overbrace{\alpha_s}) \circ \tilde{g}_i(\neq j,r,s)] =$$

$$d_s(\boldsymbol{a}) \circ [\ t_{ri}(\cdot) \circ \tilde{g}_i(\neq j,r)] \underset{i}{\tilde{\to}} t_{ri}(\cdot) \circ \tilde{g}_i(\neq j,r).$$

Пусть буква $t_{sj}(\boldsymbol{a})$– недиагональна. Но, как мы уже видели, так может быть только тогда, когда $p(r) = p(i)$. Последнее ввиду $r > j > i$ дает нам $p(j) = p(i)$. Заменив в этом случае “многообличный” элемент $t_{sj}(\boldsymbol{a})$ с $t_{si}(\boldsymbol{a})$ (с помощью 15) и используя соотношения 10, (24), здесь мы к требуемому виду приходим так

$$V \underset{i}{\tilde{\to}} \ [t_{si}(\boldsymbol{a}) \circ t_{si}(\overbrace{\alpha_s})] \circ t_{ri}(\cdot) \circ \tilde{g}_i(\neq j,r,s) = [t_{si}(\overbrace{\alpha_s}) \circ t_{ri}(\cdot)] \circ \tilde{g}_i(\neq j,r,s) =$$

$$t_{ri}(\cdot) \circ [t_{si}(\overbrace{\alpha_s}) \circ \tilde{g}_i(\neq j,r,s)] = t_{ri}(\cdot) \circ \tilde{g}_i(\neq j,r).$$

Нам нужны также следующие преобразования

$$V = t_{rj}(\alpha) \circ g_i(\neq j) \underset{i}{\tilde{\to}} \tilde{g}_i(\neq j),\ r > j > i, \tag{2.26}$$

где $\tilde{g}_i(\neq j)$– снова некоторая вертикальная форма ступени i. Покажем, что преобразования (2.26) действительно имеют место. Пусть $\boldsymbol{m}$ – длина формы $g_i(\neq j)$. Если $\boldsymbol{m} = 0$, то, как и выше, мы положим $\tilde{g}_i(\neq j) = 0$. При $\boldsymbol{m} \geq 1$ справедливость (26) применением (2.24), (2.22), (2.25) и 10 легко усматривается из

$$V = [t_{rj}(\alpha) \circ t_{ri}(\overbrace{\alpha_r})] \circ \tilde{g}_i(\neq j,r) = t_{ri}(\overbrace{\alpha_r}) \circ [t_{rj}(\overbrace{\alpha}) \circ \tilde{g}_i(\neq j,r)] \underset{i}{\tilde{\to}}$$

$$[t_{ri}(\overbrace{\alpha_r}) \circ t_{ri}(\cdot)] \circ \tilde{g}_i(\neq j,r) = t_{ri}(\overbrace{\alpha_r}) \circ \tilde{g}_i(\neq j,r) = \tilde{g}_i(\neq j).$$

Имеет место и

Теорема 2 (о столбцовой трансформации букв). *Пусть нам задана вертикальная форма* $g_i = \prod_{p \in P_i} t_{pi}(\beta_p)$ *ступени* $i,\ 1 \leq i < mn$. *Пусть далее,* y *означает либо диагональные буквы* $d_q(\tau)$, $d_{rk}(\varepsilon,\sigma)$, *либо же недиагональную* *квазитранс-векцию* $t_{rj}(\alpha),\ r > j \geq i$. *Тогда для них применяя соотношения* 8 –11, (2.24) *и* (2.26) *можно выполнить преобразование*

$$V = y \circ g_i \underset{i}{\overset{\sim}{\rightarrow}} \tilde{g}_{i}, \qquad (\underset{i}{\overset{\sim}{\rightarrow}})$$

где $\tilde{g}_i$ *– некоторая вертикальная форма ступени* i.

Доказательство. Оно также является комбинаторным и различает следующие случаи.

a) Если y – диагональна, то преобразование $(\underset{i}{\overset{\sim}{\rightarrow}})$ осуществляется при помощи соотношений 3, 9, 8.

b) $y = t_{rj}(\alpha),\ j = i$. Здесь мы используя соотношения структурной перестановочности (24) и 10 требуемую форму получаем так $V = [t_{ri}(\alpha) \circ t_{ri}(\overbrace{\beta_r})] \circ \tilde{g}_i(\neq r) = t_{ri}(*) \circ \tilde{g}_i(\neq r) = \tilde{g}_i$.

c) $y = t_{rj}(\alpha),\ j > i$. В этом случае применение (2.24), 10 , 11, (2.26) и разобранного п. a) дает нам

$$V = [t_{rj}(\alpha) \circ t_{ji}(\overbrace{\beta_j})] \circ \tilde{g}_i(\neq j) = d_j(\cdot) \circ t_{ri}(\overbrace{\alpha\beta_j}) \circ t_{ji}(\overbrace{\beta_j}) \circ [t_{rj}(\overbrace{\alpha}) \circ \tilde{g}_i(\neq j)] \underset{i}{\overset{\sim}{\rightarrow}}$$

$$d_j(\cdot) \circ t_{ri}(\overbrace{\alpha\beta_j}) \circ [t_{ji}(\overbrace{\beta_j}) \circ \tilde{g}_i(\neq j)] = d_j(\cdot) \circ t_{ri}(\overbrace{\alpha\beta_j}) \circ \tilde{g}_i = d_i(\cdot) \circ [t_{ri}(\overbrace{\alpha\beta_j}) \circ t_{ri}(\overbrace{\beta_r})] \circ$$

$$\tilde{g}_i(\neq r) = d_j(\cdot) \circ [t_{ri}(*) \circ \tilde{g}_i(\neq r)] = d_j(\cdot) \circ \tilde{g}_i \underset{i}{\overset{\sim}{\rightarrow}} \tilde{g}_i . \square$$

Переходим к вопросу о стандартном строении элементов группы $SL^{\circ}(n, \Lambda)$. Пусть $s(W)$ означает одну (не важно какую) из стандартных форм слова W алфавита (8).

Теорема 3. *Всякое слово* W *алфавита* (8) *применением соотношений* 1–16 *можно привести к стандартному виду* $s(W)$.

Доказательство**.** Оно использует преобразования

$$d_i(\mu) \circ d_{ij}(\varepsilon,\sigma) = d_j(*) \circ d_{ij}(\mu \circ \varepsilon,*), \quad j \in S, \qquad (d_i)$$

являющиеся следствиями из 4, 2 и 1 (здесь $d_i(\mu), d_{ij}(\varepsilon, \sigma)$ – произвольные буквы из (8)). Действительно, как показывают формулы соотношения 4, квазиобратную для $d_{ij}(\varepsilon,\sigma)$ матрицу можно представить в виде $d'_{ij}(\varepsilon,\sigma) =$

$d_{ij}(\varepsilon',\overset{\frown}{\sigma'})$. Тогда применяя 4, 1 и 2 будем иметь $d_{ij}(\mu\circ\varepsilon,*)\circ d'_{ij}(\varepsilon,\sigma) =$

$d_{ij}(\mu\circ\varepsilon,*)\circ d_{ij}(\varepsilon',\overset{\frown}{\sigma'}) = d_j(*)\circ d_i(\mu)\circ d_j(*) = d'_j(*)\circ d_i(\mu)$. Отсюда разложение (d_i) уже следует очевидным образом.

Переходим к доказательству теоремы. Применяя сначала теоремы 1 и 2 заданное слово записываем в виде

$$W = g_1\circ g_2\circ\ldots\circ g_{mn-1}\circ D\circ f_{mn-1}\circ\ldots\circ f_2\circ f_1,$$

где D – некоторое слово, составленное из диагональных букв алфавита (8) (доказательство этого факта подробно содержится в [13]). Использование 3 приведет теперь этот сомножитель D к виду, где он состоит только из букв вида $d_r(\tau)$ и $d_{ij}(\varepsilon,\sigma),\ j\in S$. Применяя затем к полученному выражению для D 1, 2, 4 – 7, а также соотношение, полученное из (d_i) взятием от обеих частей их квазиобратных, представим его в виде $D = d\circ D_S$, где $d = d_1(\mu_1)\circ$ $d_2(\mu_2)\circ\ldots\circ d_{mn}(\mu_{mn})$. Чтобы завершить доказательство, нам осталось согласовать d с сомножителем D_S. Пусть $d_i(\mu_i)$ – произвольная буква из d. Если здесь $i\notin J(D_S)$, то никакое согласование не потребуется. Случай, когда $i\in J(D_S)$, требует чуть подробного рассмотрения. Как и для форм f_i и g_i, ниже под записью $d(\neq i)$ мы условимся понимать слово d, для которого $d_i(\mu_i) = 0$. Пусть далее, $D_S = (D_S)_1\circ d_{ij}(\varepsilon,\sigma)\circ(D_S)_2$ – разложение слова D_S (ясно, что $J\{(D_S)_1\}, J\{(D_S)_2\}$ не содержат номер i). В этом случае используя 2, 7, 1 и (d_i) будем иметь

$$D = d(\neq i)\circ[d_i(\mu_i)\circ(D_S)_1]\circ d_{ij}(\varepsilon,\sigma)\circ(D_S)_2 = d(\neq i)\circ(\tilde{D}_S)_1\circ[d_i(\mu_i)\circ d_{ij}(\varepsilon,\sigma)]\circ(D_S)_2$$

$$= [d(\neq i)\circ(\tilde{D}_S)_1\circ d_j(*)]\circ d_{ij}(\mu_i\circ\varepsilon,*)\circ(D_S)_2 = d(\neq i)\circ[(\tilde{D}_S)_1\circ d_{ij}(\mu_i\circ\varepsilon,*)\circ(D_S)_2] =$$

$$d(\neq i)\circ\tilde{D}_S,$$

т.е. i-я буква из d согласована с D_S. Аналогично поступая и с остальными номерами $i \in J(D_S)$, в итоге мы приходим к выражению $D = d \circ D_S$, где сомножитель d является согласованным с D_S. Это означает, что

$$W = g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_{mn-1} \circ d \circ D_S \circ f_{mn-1} \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1$$

есть требуемая стандартная форма $s(W)$.

§8. Представление группы $SL^{\circ}(n, \Lambda)$

В этом параграфе мы сформулируем основной результат главы. Матрицу $a = (a_{ij})$ из $M(n,\Lambda)$ назовем *радикальной,* если $a_{ij} \in J$ при всех i и j. Очевидно, символ (is) будет радикальным в том и только том случае, когда $s = i$. Далее, стандартное представление $s(W)$ будем называть *радикальным,* если радикальными являются все его буквы. Стандартные же записи вида

$$\boldsymbol{g}_1 \circ \boldsymbol{g}_2 \circ \ldots \circ \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{n}-1} \circ d_m(\varepsilon_1) \circ d_{2m}(\varepsilon_2) \circ \ldots \circ d_{nm}(\varepsilon_n) \circ \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}-1} \circ \ldots \circ \boldsymbol{F}_2 \circ \boldsymbol{F}_1,$$

где $\quad \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{k}} = t_{(k+1)m,\, km}(*_{k+1}) \circ \ldots \circ t_{nm,\, km}(*_n), \quad \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}} = t_{km,(k+1)m}(*_{k+1}) \circ \ldots \circ t_{km,nm}(*_n) \quad (1 \le k < n),$

мы назовем *приведенными* стандартными формами. Ниже $s^*(W)$ будет означать приведенную стандартную форму слова W (допускающего такую запись).

К основному результату предпошлем еще следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть нам заданы расширенные треугольные матрицы* $x = (x_{ij})_{i \ge j}$ *и* $y = (y_{ij})_{i < j}$ *из* $M(n,\Lambda)$. *Тогда для них* $x \circ y \equiv 0 \to x \equiv y \equiv 0$ *(здесь* $\equiv$ *означает сравнение по модулю* $M(n,J)$*).*

Доказательство этой леммы содержится в [14].

Теперь у нас все готово, чтобы сформулировать основной результат относительно группы $SL^{\circ}(n, \Lambda)$.

Теорема 4. *Обобщенная специальная линейная группа* $SL^{\circ}(n, \Lambda), n \ge 2,$ *над полулокальным кольцом* Λ *в образующих* (8) *представляется соотношениями* 1–16.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $W = 0$ – произвольное соотношение группы $SL^{\circ}(n, \Lambda)$ в алфавите (8). Применяя к левой части теорему 3 представим его в виде

$$s(W) = g_1 \circ \ldots \circ g_{mn-1} \circ d \circ D_S \circ f_{mn-1} \circ \ldots \circ f_1 = 0, \qquad (2.27)$$

где левая часть представляет собой стандартную форму слова W. При помощи леммы 4 в [14] подробно показано, что равенство (27) возможно только тогда, когда оно имеет вид

$$s(W) = g_1 \circ \ldots \circ g_{mn-1} \circ d \circ D_S \circ F_{mn-1} \circ \ldots \circ F_1 = 0, \qquad (2.28)$$

и где сомножители $g_1, \ldots, g_{mn-1}, F_{mn-1}, \ldots, F_1$ – радикальны, а $d \circ D_S \equiv 0$ (сравнение здесь также по модулю $M(n, J)$).

Покажем теперь, что с помощью соотношений 1–15 форму $s(W)$ из (2.28) можно преобразовать к приведенному виду. Займемся сперва сомножителем $d \circ D_S$. Очевидно, сравнение $d \circ D_S \equiv 0$ возможно только тогда, когда D_S – пусто и $d \equiv 0.$ Применением к d соотношений 15 этот сомножитель приводится к виду, где его составляющими будут лишь матрицы вида $d_{km}(\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{a} \equiv 0,\ 1 \le k \le n.$ Соби-рая затем эти буквы с помощью 1 и 2, мы приходим к представлению рассматриваемого сомножителя $d \circ D_S = d_m(\boldsymbol{a}_1) \circ d_{2m}(\boldsymbol{a}_2) \circ \ldots \circ d_{nm}(\boldsymbol{a}_n).$

Переходим к сомножителям $s(W)$ в (28), не содержащимся в $d \circ D_S$. Рассмотрим для произвольного $k,\ 1 \le k < n,$ отрезок $\tilde{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{k}} = F_{km} \circ F_{km-1} \circ \ldots \circ F_{(k-1)m+1}$ из (2.28). Пусть $t_{iq}(\alpha_{iq})$ – произвольная буква из $\tilde{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{k}}$ (здесь $p(i) = k$) и $q \in P_i).$ Используя 15 производим для нее замену $t_{iq}(\alpha_{iq}) = d_{km}(\alpha_{iq}),$ если $p(q) = k,$ и $t_{iq}(\alpha_{iq}) = t_{mk, mp(q)}(\alpha_{iq}),$ если $p(q) > k.$ Подставляя эти выражения в $\tilde{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{k}}$ и собирая их при помощи соотношений 8, 1 и 10, для этого отрезка будем иметь представление $\tilde{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{k}} = d_{km}(*_k) \circ t_{km,(k+1)m}(*_{k+1}) \circ \ldots \circ t_{km,nm}(*_n) = d_{km}(*_k) \circ \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}$. А что касается неполного отрезка $F_{mn-1} \circ F_{mn-2} \circ \ldots \circ F_{(n-1)m+1}$ из (28), то он соотношениями 15, 1 аналогичным образом приводится к виду $d_{nm}(*_n)$. Совершенно аналогично показываются и представления

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{k}} = g_{(k-1)m+1} \circ \ldots \circ g_{km} = \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{k}} \circ d_{km}(*_k),\ 1 \le k < n,\ \ g_{(n-1)m+1} \circ \ldots \circ g_{mn-1} = d_{nm}(*_n)$$

при помощи соотношений 15, 8, 1 и 10. Подставляя теперь найденные выражения в (2.28) и применяя 8, 2 и 1 мы действительно приходим к приведенному соот-ношению

$$s^*(W) = \boldsymbol{g}_1 \circ \ldots \circ \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{n}-1} \circ \boldsymbol{D}_1 \circ \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}-1} \circ \ldots \circ \boldsymbol{F}_1 = 0, \tag{2.29}$$

где $\boldsymbol{D}_1 = d_m(\tau_1) \circ d_{2m}(\tau_2) \circ \ldots \circ d_{nm}(\tau_n)\quad (\tau_q \equiv 0,\ \ q = 1, 2, \ldots, n).$

При истолковании $s^*(W)$ в (2.29) как нерасширенную (т.е. обычную) матрицу из $SL^{\circ}(n, \Lambda)$ ее первой строкой будет

$$\langle \tau_1,\ *_2 + \tau_1 *_2, \ldots, *_n + \tau_1 *_n \rangle$$

и она равна нулю. Отсюда следует, что $\tau_1 = *_2 = \ldots = *_n = 0.$ Аналогичные рассуждения относительно первого столбца $s^*(W)$ показывают, что равны нулю и все аргументы формы $\boldsymbol{g}_1$. Тогда (2.29) примет вид

$$s^*(W) = \boldsymbol{g}_2 \circ \ldots \circ \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{n}-1} \circ \boldsymbol{D}_2 \circ \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}-1} \circ \ldots \circ \boldsymbol{F}_2 = 0,$$

где $\boldsymbol{D}_2 = d_{2m}(\tau_2) \circ \ldots \circ d_{nm}(\tau_n),$ Отсюда мы точно таким же образом заключаем равенство нулю всех аргументов форм $\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{F}_2$ и $\tau_2 = 0$ и т.д. Описанный процесс аннуляции на $(n-1)$-м шаге дает нам равенство нулю также аргументов форм $\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{n}-1}, \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}-1}$ и $\tau_{n-1} = \tau_n = 0.$

Итак, равенство (2.29) возможно только в том случае, когда его форма $s^*(W)-$ графически нулевая. А это означает, что заданное соотношение $W = 0$ есть следствие от 1–16. Теорема 4 доказана полностью.

В процессе доказательства основной теоремы 4 мы видели, что серия 16 была использована только на тех номерах $i, 1 \le i < mn,$ для которых $|\overline{\Lambda}_i| = 2$ (и только при выводе производного разложения (2.16)). Поэтому в случаях, когда $|T_k| \ge 3$ при всех $k = 1,\ldots,l,$ основной результат может быть сформулирован так.

Теорема 5. *Обобщенная специальная линейная группа* $SL^{\circ}(n,\Lambda), n\geq 2$, *над полулокальным кольцом* Λ, *все тела вычетов которого содержат не менее трех элементов, в образующих* (8) *задается соотношениями 1–15.*

§9. Описания промежуточных подгрупп

Здесь мы покажем, что проведенными рассуждениями над полулокальным Λ можно описать (образующими и соотношениями) не только $SL^{\circ}(n,\Lambda)$, но и все промежуточные подгруппы H, для которых $SL^{\circ}(n,\Lambda)\leq H\leq GL^{\circ}(n,\Lambda)$, $n\geq 2$. Подгруппа H содержит в себе все квазитрансвекции $t_{ij}(\alpha)$ и матрицы $d_{rk}(\varepsilon,\sigma)$ (ибо последние входят в $SL^{\circ}(n,\Lambda)$).

Нам нужны и некоторые другие образующие из H. Пусть $det^{\circ} H = H_a\times H_b\times\ldots\times H_c$ означает образ группы H при эпиморфизме

$$det^{\circ}: GL^{\circ}(n,\Lambda)\to c(T_1^{\circ})\times c(T_2^{\circ})\times\ldots\times c(T_l^{\circ}) \qquad (det^{\circ})$$

(здесь $H_a\leq c(T_1^{\circ}), H_b\leq c(T_2^{\circ}),\ldots,H_c\leq c(T_l^{\circ})$). Обозначим через $\Lambda_r^{\circ}(H)(1\leq r\leq mn)$ подгруппу всех тех $\varepsilon\in\Lambda_r^{\circ}$, для которых $det^{\circ}\{d_r(\varepsilon)\}\in H_k$, где $k-$такой номер из S, что $r\sim k$. Рассмотрим произвольную матрицу x из H. Она, как в §3, представляется в виде $x=t\circ h\circ d_1\circ t_1$, где t,t_1-некоторые слова, составленные из квазитрансвекций $t_{ij}(\alpha)$, $h-$слово, образованное из букв вида (d_{ik}) (см. начало главы), а сомножитель d_1 имеет вид $d_1=d_a(x_a)\circ d_b(x_b)\circ\ldots\circ d_c(x_c)$ ($x_k\in\Lambda_k^{\circ}$ и как прежде $\{a,b,\ldots,c\}=S$). Из разложения x видно, что $d_1\in H$. Тогда $det^{\circ} d_1 = det^{\circ}\{d_a(x_a)\}\circ det^{\circ}\{d_b(x_b)\}\circ\ldots\circ det^{\circ}\{d_c(x_c)\}\in H_a\times H_b\times\ldots\times H_c$, т.е.

$$det^{\circ}\{d_k(x_k)\}\in H_k. \qquad (\in)$$

А это означает, что $x_k\in\Lambda_k^{\circ}(H)$ при всех $k=a,b,\ldots,c$. С другой стороны по первой теореме о гомоморфизме (см., например, [5], с. 44) рассматриваемая подгруппа H является полным прообразом своего образа $H_a\times H_b\times\ldots\times H_c$ при эпиморфизме (det°). Поэтому ($\in$) влечет за собой также включения $d_k(x_k)\in H \quad (k=a,b,\ldots,c)$. Итак, нами показана порождаемость группы H матрицами

$$t_{ij}(\alpha),\ \alpha\in\Lambda_{ij},\ j\neq i\sim j;\quad d_j(\tau),\ \tau\in\Lambda_j^{\circ}(H);\quad d_{ik}(\varepsilon,\sigma),\quad <\varepsilon,\sigma>\in S(\Lambda_i^{\circ},\Lambda_k^{\circ}), \quad (2.33)$$

$$k \sim i < k \ \ (1 \le i,k,j \le mn).$$

Группу H мы будем представлять в алфавите (2.33).

Заменим соотношения 1, 2, 7, 8 из 1 – 16 на

1. $d_i(\varepsilon) \circ d_i(\mu) = d_i(\varepsilon \circ \mu),\ \varepsilon, \mu \in \Lambda_i^\circ(H);$

2. $d_i(\varepsilon) \circ d_k(\mu) = d_k(x) \circ d_i(\varepsilon),\ \varepsilon \in \Lambda_i^\circ(H), \mu \in \Lambda_k^\circ(H),\ i \ne k,$

где $x = \mu + [\varepsilon\mu + \mu\varepsilon' + \varepsilon\mu\varepsilon']_{ik};$

7. $d_k(\tau) \circ d_{ij}(\varepsilon,\sigma) = d_{ij}(\varepsilon,\sigma) \circ d_k(x),\ \tau \in \Lambda_k^\circ(H), j \in S,\ k \ne i,$

где $x = a' \circ \tau \circ a\ \ (\equiv \tau),\ a = [\varepsilon]_{ki} + [\sigma]_{kj};$

8. $t_{ij}(\alpha) \circ d_k(\varepsilon) = d_k(\varepsilon) \circ t_{ij}(x),\ \varepsilon \in \Lambda_k^\circ(H),$

где $x = \alpha + \alpha[\varepsilon]_{kj} + [\varepsilon']_{ik}\alpha + [\varepsilon']_{ik}\alpha[\varepsilon]_{kj},$

соответственно, оставив при этом остальные серии без изменения. Тогда буквальное повторение рассуждений, проделанных для $SL^\circ(n,\Lambda)$ (они проходят беспрепятственно), дает нам следующие результаты.

Теорема 6. *Обобщенная промежуточная подгруппа* H, $SL^\circ(n,\Lambda) \le H \le GL^\circ(n,\Lambda), n \ge 2,$ *над полулокальным кольцом* Λ *в образующих* (33) *представляется соотношениями* **1, 2,** 3 – 6, **7, 8** *и* 9 – 16.

Случай, когда Λ – кольцо без тел вычетов $GF(2)$, как в теореме 5, может быть рассмотрен отдельно.

Теорема 7. *Обобщенная промежуточная подгруппа* H, $SL^\circ(n,\Lambda) \le H \le GL^\circ(n,\Lambda), n \ge 2,$ *над полулокальным кольцом* Λ, *все тела вычетов которого содер-жат не менее трех элементов, в образующих* (33) *задается соотношениями* **1, 2,** 3 – 6, **7, 8** *и* 9 – 15.

Как показывают эпиморфизм (det°) и первая теорема о гомоморфизме, промежуточные подгруппы H, заключенные между $SL^\circ(n,\Lambda)$ и $GL^\circ(n,\Lambda)$ (над произвольным полулокальным Λ), образуют такую же структуру, что и структура всех подгрупп прямого произведения $c(T_1^\circ) \times c(T_2^\circ) \times \ldots \times c(T_l^\circ).$ Эпиморфизм же $c: T_1^\circ \times T_2^\circ \times \ldots \times T_l^\circ \to c(T_1^\circ) \times c(T_2^\circ) \times \ldots \times c(T_l^\circ).$ показывает, что последняя структура может быть интерпретирована также как объединение подструктур $L(T_1^{\circ},[T_1^{\circ},T_1^{\circ}]) \cup \ldots \cup L(T_l^{\circ},[T_l^{\circ},T_l^{\circ}])$.

Среди описаний, приведенных в этом параграфе, особый интерес представляет случай, когда $H = GL^{\circ}(n,\Lambda)$. Как легко видеть, в этом случае серии 3–7 и 9 (см. первую часть работы) являются неадекватными (т.е. теряют смысл). Поэтому здесь теоремы 6, 7 (а также приведенные выше к ним дополнения) дают нам еще одно описание группы $GL^{\circ}(n,\Lambda)$, рассмотренной ранее в работах [13] и [14]. А точнее, имеют место следующие теоремы.

Теорема 8. *Обобщенная полная линейная группа* $GL^{\circ}(n,\Lambda), n \geq 2$, *над полулокальным кольцом* Λ *в образующих*

$$t_{ij}(\alpha), \alpha \in \Lambda_{ij}, \ j \neq i \sim j; \ d_j(\tau), \tau \in \Lambda_j^{\circ} \ (1 \leq i,j \leq mn) \qquad (2.34)$$

представляется соотношениями 1, 2, 8 *и* 10 –16.

Теорема 9. *Обобщенная полная линейная группа* $GL^{\circ}(n,\Lambda), n \geq 2$, *над полулокальным кольцом* Λ, *все тела вычетов которого содержат не менее трех элементов, в образующих* (34) *задается соотношениями* 1, 2, 8, 10–15.

ГЛАВА III. ДИКОВСКИЕ ОПИСАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП НАД РАДИКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ

В этой главе мы также будем иметь дело с некоторыми (основными) кольцами без единицы. Пусть R – накоротко какое-то ассоциативное кольцо и $M(n,R)$ $(n \geq 1)$ – полное матричное кольцо над ним. Относительно этих колец имеет место следующий факт: если $M(n,R)$ имеет единицу, то и основное кольцо R обязано обладать ею. Покажем, что это действительно так. Допустим $a=(a_{ij})$ – единичный элемент кольца $M(n,R)$. Тогда взяв матрицы $d_1(x)=diag(x,0,...,0)$ из $M(n,R)$ (где включен и случай отсутствия нулей, т.е. $n=1$), мы имеем $ad_1(x)=d_1(x)=d_1(x)a \rightarrow a_1x=x=xa_1$ при всех $x \in R \rightarrow a_{11}$ – нейтральный элемент по умножению (он определяется однозначно) $\rightarrow a_{11}=1$ – единица в R. Установленный факт показывает, что рассматривать какие-либо (содержательные) линейные группы над ассоциативными кольцами R без 1 (например, при радикальных $R \neq \{0\}$, см, ниже) и решить для них какие-то задачи, можно только в форме обобщенного вида. Приведенные доводы свидетельствуют также о том, что введение обобщенных групп в теорию ли-нейных групп – это не просто роскошь, а является настоятельной пот-ребностью.

Для ассоциативных R всегда верны следующие теоретико-множествен-ные включения $\{0\} \subseteq R^{\circ} \subseteq R$. Экстремальный случай в этой цепочке, когда группа R^0 достигает своей верхней границы, имеет в алгебре особое значе-ние. Ассоциативные кольца, для которых $R^{\circ}=R$ носят название *радикальных* колец. Такие кольца в реальном мире существуют. Очевидными примерами радикального кольца могут служить кольца с нулевыми умножениями. Пер-вый пример радикального кольца, не входящего в названный класс (а точнее, пример простого радикального кольца), был построен Сонсядой в 1961-м го-ду в [55]. Кроме того прямые суммы любых радикальных колец снова дают нам радикальные кольца. Приведенные факты показывают, что радикальные кольца в природе встречаются не так уж редко (как поначалу нам показалось). Все ненулевые радикальные кольца обладают особенностью – в них строго отсутствует 1. Действительно, допуская противное, мы имели бы $1 \in R = R^{\circ} \to -1 \in R^{\circ} \to (-1)x = -1 + (-1)x + x = 0$

для всех $x \in R \to -1 = 0 \to 1 = 0 \to R = \{0\}$ что противоречит с $R \neq \{0\}$.

§1. Образующие и соотношения обобщенной полной линейной группы над радикальным кольцом

Напомним необходимые нам определения . Пусть R– ассоциативное кольцо, для которого существование 1 не обязательно. Обозначим через $\circ$, как всегда, квазиумножение в этом кольце, т.е. $x \circ y = x + xy + y$. Элемент $\alpha \in R$ мы называли *квазиобратимым*, если для него $\alpha \circ x = 0 = x \circ \alpha$ при некотором $x \in R$. По квазиобратимому α его квазиобратное x всегда определяется однозначно и оно обозначается как α'. Множество всех квазиобратимых элементов из R обозначается через R°. Оно непусто, содержит, например, элемент 0. Введенная совокупность R° образует группу относительно операции $\circ$, где единицей послужит нуль. Замечательно то, что в случае наличия 1 в R отображение

$$R^{\bullet} \to R^{\circ},\ 1 + x \to x$$

($^{\bullet}$– взятие мультипликативной группы), задает изоморфизм групп. Таким образом, квазигруппа является обобщением понятия обычной мультипликативной группы $R^{\bullet}$ на самые общие случаи ассоциативных колец R. Этот, казалось бы, простой факт может привести нас к самым глубоким последствиям (например, открывать путь к необъятным простором комбинаторной теории групп). Сказанное мы продемонстрируем на примере кодового описания обобщенной полной линейной группы $GL^{\circ}(n,R), n \geq 2$, над произвольным ненулевым радикальным кольцом R.

Возьмем в качестве ассоциативного R полное матричное кольцо $M(n,R)$, где n– любое натуральное число. Для группы квазиобратимых элементов этого кольца $M(n,R)$ в математической литературе принято обозначение $GL^{\circ}(n,R)$ и она называется *обобщенной полной линейной группой* степени n над кольцом R.

Итак, наш объект рассмотрения в этом параграфе – это обобщенная полная линейная группа $GL^{\circ}(n,R), n \geq 2$ над произвольным радикальным кольцом R. Ниже будут действовать следующие обозначения: $t_{ij}(\alpha)$ $(i \neq j)$ – квазитрансвекция, т.е. матрица из $M(n,R)$, где на (недиагональной) позиции $< i, j >$ стоит элемент $\alpha \in R$, а все прочие позиции заполнены нулями; $d_i(\varepsilon)$ – диагональная матрица из $M(n,R)$, отличающаяся от нулевой матрицы лишь позицией $< i, i >$, где стоит элемент $\varepsilon \in R$; $f_i = \prod_{i<k\leq n} t_{ik}(\alpha_k)$ $(1 \leq i < n)$ и $\prod$ понимается в смысле квазипроизведения) – горизонтальная форма ступени i; $g_i = \prod_{i<k\leq n} t_{ki}(\beta_k)$ $(1 \leq i < n)$, ($\prod$ – также квазипроизведение) – вертикальная форма ступени i. Поскольку $t_{ij}(\alpha) \circ t_{ij}(-\alpha) = 0$ и $d_i(\varepsilon) \circ d_i(\varepsilon') = 0$ (α, ε – любые элементы из R), матрицы $t_{ij}(\alpha), d_i(\varepsilon)$ входят в $GL^{\circ}(n,R)$. Оказывается, группа $GL^{\circ}(n,R)$ не только содержит в себе $t_{ij}(\alpha)$ и $d_i(\varepsilon)$, но даже и порождается (всеми) такими матрицами. Действительно, взяв произвольно матрицу $a = (a_{ij})$из $GL^{\circ}(n,R)$ и производя над ней отщепления формой $f_1 = t_{12}(x_2) \circ t_{13}(x_3) \circ \ldots \circ t_{1n}(x_n)$, $x_k = \varepsilon_1' \circ (-\varepsilon_1 - a_{1k})$ справа, и формой $g_1 = t_{21}(y_2) \circ t_{31}(y_3) \circ \ldots \circ t_{n1}(y_n)$, $y_k = (-a_{k1} - \varepsilon_1) \circ \varepsilon_1'$ слева, имеем $g_1' \circ a \circ f_1' = diag(\varepsilon_1, b)$где $\varepsilon_1 = a_{11}$ и b – некоторая клетка порядка $n-1$. Выполнение аналогичных отщеплений в полученной матрице при помощи некоторых форм f_2 и g_2 даст нам $g_2' \circ g_1' \circ a \circ f_1' \circ f_2' = diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2, c)$, где клетка c имеет порядок $n-2$ и т.д. Описанный процесс отщеплений на $(n-1)$-м шаге приводит нас к $g_{n-1}' \circ \ldots \circ g_1' \circ a \circ f_1' \circ \ldots \circ f_{n-1}' = diag(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, т.е. к разложению

$$a = g_1 \circ \ldots \circ g_{n-1} \circ d_1(\varepsilon_1) \circ \ldots \circ d_n(\varepsilon_n) \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1. \qquad (sf)$$

А это означает порождаемость группы $GL^{\circ}(n,R)$ указанными элементарными матрицами.

В качестве порождающей для $GL^{\circ}(n,R)$ системы мы возьмем (естественный) алфавит

$$t_{ij}(\alpha), \alpha \in R, i \neq j;\; d_i(\varepsilon), \varepsilon \in R\; (1 \leq i, i \leq n). \qquad (3.1)$$

Наши дальнейшие рассуждения используют *стандартные формы* в алфавите (1). Таковыми мы объявляем те слова алфавита (1), которые представлены как в правой части равенства (sf).

Ниже нам будет нужна

Лемма 1. *Представление нулевой матрицы в стандартном виде* (sf) *единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть в (sf) $a=0$. Поскольку подслово $g_2 \circ ... \circ g_{n-1} \circ d_2(\varepsilon_2) \circ ... \circ d_n(\varepsilon_n) \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_2$ имеет клеточно-диагональный вид $diag(0,b)$, последнее влечет за собой $g_1 = d_1(\varepsilon_1) = f_1 = 0.$ Но так может быть только при нулевых буквах форм g_1 и f_1. Поступая теперь точно таким же образом с сомножителями g_2 и $d_2(\varepsilon_2)$, f_2, заключаем равенство нулю всех букв и этих форм и т.д. Описанный процесс аннуляции на $(n-1)$-м шаге приводит нас к заключению о возможности представления нуля в виде (sf) только при нулевых буквах этого разложения. Доказательство леммы 1 окончено.

Напишем теперь в алфавите (1) следующие непосредственно проверяемые соотношения (во избежание усложнений в этом параграфе вводим новую систему нумераций):

1. $d_i(\varepsilon) \circ d_i(\sigma) = d_i(\varepsilon \circ \sigma)$;
2. $d_i(\varepsilon) \circ d_j(\sigma) = d_j(\sigma) \circ d_i(\varepsilon), i \neq j$;
3. $t_{ij}(\alpha) \circ d_i(\varepsilon) = d_i(\varepsilon) \circ t_{ij}(\alpha + \varepsilon'\alpha)$;
4. $t_{ij}(\alpha) \circ d_j(\varepsilon) = d_j(\varepsilon) \circ t_{ij}(\alpha + \alpha\varepsilon)$;
5. $t_{ij}(\alpha) \circ d_k(\varepsilon) = d_k(\varepsilon) \circ t_{ij}(\alpha), k \neq i, j$;
6. $t_{ij}(\alpha) \circ t_{ij}(\beta) = t_{ij}(\alpha + \beta)$;
7. $t_{ij}(\alpha) \circ t_{ji}(\beta) = d_i(\varepsilon) \circ d_j(\sigma) \circ t_{ji}(\beta + \sigma'\beta) \circ t_{ij}(\alpha + \varepsilon'\alpha)$,

где $\varepsilon = \alpha\beta, \sigma = -\beta(\alpha + \varepsilon'\alpha)$;

8. $t_{ik}(\alpha) \circ t_{kj}(\beta) = t_{ij}(\alpha\beta) \circ t_{kj}(\beta) \circ t_{ik}(\alpha), i \neq j;$

9. $t_{ik}(\alpha) \circ t_{rj}(\beta) = t_{rj}(\beta) \circ t_{ik}(\alpha), i \neq j, k \neq r., \ |\{i, k, r, j\}| \geq 3.$

Нашей дальнейшей целью является доказательство полноты системы соотношений $1-9$ для группы $GL^{\circ}(n, R)$ относительно образующих (1). Решим мы эту задачу при помощи метода трансформации, развитого в [13]– [15]. Напомним необходимые определения из упомянутых работ. Для номера i, $1 \leq i < n$, на множестве всех слов алфавита (1) вводим (бинарные) отношения $\overset{i}{\underset{}{\tilde{\longrightarrow}}}$, положив $\omega \overset{i}{\tilde{\longrightarrow}} \upsilon$ тогда и только тогда, когда они связаны соотношением $\omega = X \circ v$, где X – некоторое слово, не содержащее трансвекции вида $t_{k<j}(\alpha), \alpha \neq 0, k \leq i.$ Введенные отношения $\overset{i}{\tilde{\longrightarrow}}$ являются рефлексивными и транзитивными. При решении упомянутой задачи важный момент составляет

Теорема 1 (о горизонтальной трансформации букв). *Пусть* f_i – *произвольная ненулевая горизонтальная форма ступени* i $(1 \leq i < n)$ *и* x – *также произвольная отличная от нуля буква алфавита (1), для которой при* $x = t_{pq}(\alpha)$ *считается выполненным условие* $p < q \rightarrow p \geq i.$ *Для них используя соотношения 1– 9 можно выполнить преобразование*

$$v = f_i \circ x \overset{i}{\tilde{\longrightarrow}} \tilde{f}_i,$$

где $\tilde{f}_i$ – *также некоторая (горизонтальная) форма ступени* i.

Эта теорема доказывается как в [13]. Последнее различает случаи, когда $x = d_k(\varepsilon)$ и $x = t_{pq}(\alpha)$, и проводится по известной схеме как в [17]. Это повторяющиеся детали здесь мы также опускаем.

Составим теперь подалфавит

$$t_{ij}(\alpha), \alpha \in R, \ i > j; \ d_k(\varepsilon), \ \varepsilon \in R \ (1 \leq i, k, j \leq n) \qquad (3.2)$$

алфавита (3.1). Для индекса i, $1 \leq i < n,$ на множестве всех слов алфавита (3.2) вводим отношения $\underset{i}{\tilde{\longrightarrow}}$, определив их как $\omega \underset{i}{\tilde{\longrightarrow}} \upsilon$ тогда и только тогда, когда для этих слов выполнено соотношение $\omega = \upsilon \circ Y$, где Y – некоторое слово, не содержащее трансвекции вида $t_{pq}(\alpha), \alpha \neq 0, q \leq i$. Эти отношения $\underset{i}{\overset{\sim}{\longrightarrow}}$ также рефлексивны и транзитивны. Ниже нам понадобится и следующая

Теорема 2 (о вертикальной трансформации букв). *Пусть* g_i – *произвольная ненулевая вертикальная форма ступени* i *и* y – *(также произвольная и ненулевая) буква алфавита* (3.2), *для которой при* $y = t_{pq}(\alpha)$ *считается выполненным условие* $q \geq i$. *Для них используя соотношения 3– 6, 8,9, можно выполнить преобразование* $\omega = y \circ g_i \underset{i}{\overset{\sim}{\longrightarrow}} \tilde{g}_i$, *где* $\tilde{g}_i$ – *некоторая вертикальная форма ступени* i.

Доказательство и здесь различает случаи, когда $x = d_k(\varepsilon)$ и $x = t_{pq}(\alpha)$, и проводится как в [17].

Нам нужна еще

Лемма 2. *Любое слово и алфавита (3.2) применяя соотношения 1– 9 можно представить в виде*

$$\omega = g_1 \circ \ldots \circ g_{n-1} \circ d_1(\varepsilon_1) \circ \ldots \circ d_n(\varepsilon_n). \qquad (3.3)$$

Доказательство этой леммы базируется на теоремы 1, 2 и проводится как для случая полулокальных колец (см., например, 13). Эти детали опускаются.

Теперь у нас все готово, чтобы сформулировать основное утверждение параграфа.

Теорема 3. *Обобшенная полная линейная группа* $GL^{\circ}(n, R), n \geq 2,$ *над ненулевым радикальным кольцом* R *в образующих (1) преставляется соотношениями 1 – 9.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\omega = 1$– произвольное соотношение группы $GL^{\circ}(n, R)$ в алфавите (1). Не теряя общности его левую часть можно считать пред-ставленной в виде

$$\omega \overset{\overset{1}{\sim}}{\longrightarrow} f_1 \circ X, \qquad (3.4)$$

где f_1– некоторая горизонтальная форма ступени 1 и X – соответствующее ей дополнение. Пуст $X = x \circ X_1$, т.е. x – первая (ненулевая) буква из X. Применяя к стыку $\upsilon = f_1 \circ x$ трансформационную теорему 1, мы будем иметь запись вида $\omega \overset{\overset{1}{\sim}}{\longrightarrow} f_1 \circ X_1$, т.е добились в (3.4) сокращения длины дополнения X. Продолжая эти сокращения до тех пор, пока не исчерпается X, мы приходим к записи вида $\omega \overset{\overset{1}{\sim}}{\longrightarrow} f_1$, т.е. к разложению $\omega = Y_1 \circ f_1$, где Y_1 (по определению $\overset{\overset{1}{\sim}}{\longrightarrow}$) не содержит трансвекции вида $t_{1q}(\alpha)$, $\alpha \neq 0$. Поступая аналогичным образом с Y_1 (т.е. выделяя из него форму f_2), будем иметь $\omega = Y_2 \circ f_2 \circ f_1$, где слово Y_2 не содержит транс-векции вида $t_{p<q}(\alpha)$, $\alpha \neq 0$, $p \leq 2$, и т.д. Описанные отщепления на $(n-1)$ – м шаге приводят нас к разложению

$$\omega = Y_{n-1} \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1, \qquad (3.5)$$

где (по определению $\overset{\overset{n-1}{\sim}}{\longrightarrow}$) слово Y_{n-1} не содержит трансвекции вида $t_{p<q}(\alpha)$, $\alpha \neq 0$, $p \leq n-1$, т.е. оно является некоторым словом уже алфавита (3.2).

Применяя теперь к Y_{n-1} лемму 2, представим его в виде (3.3). Подставляя затем полученное разложение в (3.5), мы приходим к равенству

$$g_1 \circ \ldots \circ g_{n-1} \circ d_1(\varepsilon_1) \circ \ldots \circ d_n(\varepsilon_n) \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1 = 0.$$

Но по лемме 1 это возможно только при нулевых буквах левой части равенства. Поскольку все преобразования до сих пор были выполнены соотношениями 1–9, последнее означает и выводимость $\omega = 0$ из соотношений 1–9. Полнота системы соотношений 1–9 для группы $GL^{\circ}(n,R)$, $n \geq 2$, относительно образующих (1) доказана строго и полностью. Следует только отметить, что при $n = 2$ серий 8 и 9, как неадекватных, из формулировки теоремы 3 следует считать опущенными.

§2. Комбинаторное описание проективного фактора $PGL^{\circ}(n,R)$

Чтобы привести описание этой фактор-группы $PGL^{\circ}(n,R) = GL^{\circ}(n,R)/centGL^{\circ}(n,R)$, нам нужно предварительно вычислить центр

$C = centGL^{\circ}(n, R)$. Пусть $a = (a_{ij})$ – произвольная матрица из этого C. Взяв произвольно трансвекцию $t_{ij}(x)$ (алфавита (1)) имеем

$$t_{ij}(x) \circ a = a \circ t_{ij}(x) \rightarrow t_{ij}(x)\, a = a\, t_{ij}(x) \quad (1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j). \qquad (*)$$

Сравнивая в последнем равенстве позиции $< j, k >, k \neq i,$ получаем, что при любом $x \epsilon R$ $a_{jk} + x a_{ik} = a_{jk} \rightarrow x a_{ik} = 0$. Сравнение же позиций $< k, i >$, $k \neq i,$ аналогичным образом приводит нас и к $a_{ki} + a_{ki} x = a_{ki} x = 0$. Объединяя полученные равенства, мы приходим к заключению, что $a_{ki} \epsilon AnnR$ (т.е. все внедиагональные позиции являются аннуляторными). Взяв диагональную матрицу $d_i(x)$, далее имеем и следующие импликации

$$d_i(x) \circ a = a \circ d_i(x) \rightarrow d_i(x) a = a d_i(x) \rightarrow x a_{ii} = a_{ii} x \rightarrow a_{ii} \epsilon\ centR.$$

Сравнение же позиций $< j, i >$ в (*) с учетом установленной только что центральности диагональных элементов, теперь приводит нас к

$a_{ji} + x a_{ii} = a_{ji} + a_{jj} x \rightarrow x a_{ii} = a_{jj} x \rightarrow x(a_{ii} - a_{jj}) = 0 = (a_{ii}\text{-}a_{jj}) x \rightarrow a_{ii} \equiv a_{jj}(modAnnR)$.

Итак, всякий центральный элемент из $GL^{\circ}(n, R)$ обязан удовлетворять перечисленным выше требованиям. Но с другой стороны, как легко проверить, всякая матрица с такими свойствами будет принадлежать центру C. Установ-ленный факт и позволяет нам сформулировать утверждение об описании требуемого фактора. Ниже $d(\varepsilon)$, как всегда, будет обозначать скалярную матрицу $d_1(\varepsilon) \circ \ldots \circ d_n(\varepsilon)$.

Пусть теперь a – произвольная матрица из центра C. Стандартное разложение (sf) этой матрицы можно представить и в виде

$$a = g_1 \circ \ldots \circ g_{n-1} \circ \mathrm{D} \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1, \qquad (**)$$

где g_k и f_k-ые – такие же, как в §1, а $D = d_1(\varepsilon_1 \circ \dot{\varepsilon_n}) \circ \ldots \circ d_{n-1}(\varepsilon_{n-1} \circ \varepsilon_n') \circ d(\varepsilon_n)$. Можно легко проверить, что все квазитрансвекции этого разложения, а также диагональные буквы $d_k(*)$, $k < n,$ имеют аннуляторные аргументы (а аргумент ε_n – по-прежнему, централен). Если приравнять к нулю "скалярное слово" $d(\varepsilon_n)$ из (**) и все его прочие буквы, то матрица a обращается в нуль очевидным образом. Поэтому присоединяя к соотношениям группы $GL^{\circ}(n, R)$

(приведенным в §1), эти аннулирующие соотношения, мы комбинаторное описание изучаемого фактора можем сформулировать следующим образом.

Теорема 4. *Обобщенная проективная полная линейная группа PGL °(n,R), n≥ 2, над ненулевым радикальным кольцом R в алфавите (1) задается соотношениями 1− 9 и еще следующими соотношениями*

10. $t_{ij}(x) = 0,\ x\epsilon AnnR,\ i \neq j$;

11. $d_k(y) = 0,\ y\varepsilon AnnR,\ 1 \leq k < n$;

12. $d_1(\ \varepsilon\ )\circ\ldots\circ\ d_n(\varepsilon)=0,\ \varepsilon \in centR$.

Полученный результат по диковски можно перефразировать и так
$PGL^{\circ}(n,R) = \langle (*)//1-12 \rangle$.

§3. Определяющие соотношения полной элементарной линейной группы над радикальным кольцом

В этом параграфе мы находим образующие и определяющие соотношения обобщенной элементарной линейной группы $GE^{\circ}(n,R), n\geq 2$, над произвольным радикальным кольцом $R \neq \{0\}$. Как мы уже видели выше, всякое такое кольцо является безъединичным. Напомним необходимые определения. Пусть $R-$ассоциативное кольцо и $\circ-$ его квазиумножение, т.е. $x \circ y = x + xy + y$. Элемент x из R называется квазиобратимым, если для него выполнены равенства $x \circ y = 0 = y \circ x$ при некотором $y \in R$. По квазиобратимому x его квазиобратное $y = x'$ всегда определяется однозначно. Множество всех квазиобратимых элементов R° из R образует группу относительно операции $\circ$ (единицей в этой группе будет нуль). Поскольку в случае наличия 1 в R отображение $R^{\circ} \to R^{\bullet}, x \to 1 + x$ ($^{\bullet}-$взятие мульти-пликативной группы), задает изоморфизм, группа R° является обобщением понятия мультипликативной группы $R^{\bullet}$ на самые общие случаи ассоциативных колец. Напомним, что ассоциативное кольцо R называется радикальным (см. [7]), если оно совпадает со своей квазигруппой R°. Нетривиальный пример радикального (а точнее простого радикального) кольца найден в [56]. Введенные кольца интересны уже по своему необычайному определению.

Ниже R будет означать некоторое радикальное кольцо. Поскольку здесь нулевой случай $R=\{0\}$ тривиален, его мы далее будем считать отличным от нуля. Как мы уже отметили, оно не будет иметь единицу. Через $GL^{\circ}(n,R)$ обозна-чается группа квазиобратимых матриц из полного матричного кольца $M(n,R)$ и она называется обобщенной полной линейной группой степени n над кольцом R.

Ниже действуют следующие обозначения: $t_{ij}(x)\,(i\neq j)-$ квазитрансвекция, т.е. матрица из $M(n,R)$, где на позиции $\langle i,j\rangle$ стоит элемент x, а все прочие позиции заполнены нулями; $D_i(\varepsilon)\,(i<n)-$ диагональная матрица из $M(n,R)$, которая отличается от нулевой матрицы лишь двумя позициями $\langle i,i\rangle$, $\langle n,n\rangle$, где стоят элементы ε и ε' соответственно; $D_n(\delta)-$ матрица (также диагональная) из $M(n,R)$, отличающаяся от нулевой матрицы лишь одной позицией $\langle n,n\rangle$, где стоит элемент δ; $f_i=t_{i,i+1}(\alpha_{i+1})\circ\ldots\circ t_{in}(\alpha_n)-$ горизонтальная форма ступени i; $g_i=t_{i+1,i}(\beta_{i+1})\circ\ldots\circ t_{ni}(\beta_n)-$ вертикальная форма ступени i; $[R^{\circ},R^{\circ}]-$ коммутант группы R° (т.е. ее подгруппа, порожденная всеми коммутаторами $[x,y]=x'\circ y'\circ x\circ y,\ x,y\in R^{\circ}$).

Равенства $t_{ij}(\alpha)\circ t_{ij}(-\alpha)=0,\ D_k(\varepsilon)\circ D_k(\varepsilon')=0$ показывают что (элементарные) матрицы

$$t_{ij}(\alpha),\ i\neq j;\ D_k(\varepsilon),\ k<n\ (\alpha,\varepsilon\in R, 1\leq i,k,j\leq n) \qquad (1)$$

являются некоторыми элементами группы $GE^{\circ}(n,R)$. Подгруппу в $GL^{\circ}(n,R)$, порожденную перечисленными квазиобратимыми матрицами (1), обозначим через $GE^{\circ}(n,R)$ и назовем ее *обобщенной элементарной линейной группой* степени n над кольцом R. Нашей целью в настоящей работе, как мы отметили выше, является представление этой группы $GE^{\circ}(n,R),\ n\geq 2,$ в терминах образующих и соотношений. Обозначим через $G(R)$ совокупность тех элементов x из R, для которых матрицы $D_2(x)=\begin{pmatrix}\circ & \circ\\ \circ & x\end{pmatrix}$ являются некоторыми словами алфавита

$$t_{12}(\alpha)=\begin{pmatrix}\circ & \alpha\\ \circ & \circ\end{pmatrix},\ t_{21}(\beta)=\begin{pmatrix}\circ & \circ\\ \beta & \circ\end{pmatrix},\ D_1(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\varepsilon & \circ\\ \circ & \varepsilon'\end{pmatrix}, \alpha,\beta,\varepsilon\in R. \qquad (*)$$

Такая $G(R)$ очевидным образом образует подгруппу в R°. Поскольку для любых $x,y\in R^\circ$ $D_2([x,y])=D_2(x'\circ y'\circ x\circ y)=D_1(x)\circ D_1(y)\circ D_1(y'\circ x')$, для введенной группы имеет место (нормальное) включение $[R^\circ,R^\circ]\le G(R)$ (здесь нормальность $\le$ следует из инвариантности коммутанта в самой группе). Как показывают кольцево-операторные разложения

$$D_1(\varepsilon)=t_{12}(\varepsilon)\circ t_{21}(1)\circ t_{12}(\varepsilon')\circ t_{21}(-\varepsilon-1)$$

(здесь $1-$тождественный оператор, а $-\varepsilon-1-$оператор, действующий справа как $x(-\varepsilon-1)=-x\varepsilon-x$), сохраняя группу $G(R)$ удалить буквы $D_1(\varepsilon)$ из состава (*) (как, например, в случае тел), заведомо, нельзя.

Совершенно аналогичным образом можно ввести и группу $G_n(R)$, составляя ее из тех элементов $x\in R$, для которых матрицы $D_n(x)$ являются какими-то словами алфавита (1). Но чуть погодя мы увидим, что эта группа просто-попросту будет совпадать с аналогичной группой с номером $n-1$, т.е. $G_n(R)=G_{n-1}(R)$. Спускаясь так и далее, мы приходим к равенству $G_n(R)=G_2(R)=G(R)$. Итак, случаи $n\ge 3$ какую-нибудь новую группу для значений $D_n(x)$ нам давать не будут.

Группу $GE^\circ(n,R)$ мы будем представлять относительно ее же порождающей системы

$$t_{ij}(\alpha), i\ne j;\ D_k(\varepsilon),\ k<n;\ D_n(\delta)\ (\alpha,\varepsilon\in R,\delta\in G(R), 1\le i,k,j\le n). \qquad (2)$$

В указанном алфавите имеют место следующие (проверяемые напрямую) соотношения:

1. $D_k(\varepsilon)\circ D_k(\delta)=D_n([\varepsilon,\delta])\circ D_k(\varepsilon\circ\delta),\ k<n;$
2. $D_i(\varepsilon)\circ D_k(\delta)=D_n([\varepsilon,\delta])\circ D_k(\delta)\circ D_i(\varepsilon),\ i\ne k,\ i,\ k<n;$

3. $D_n(\varepsilon)\circ D_n(\delta)=D_n(\varepsilon\circ\delta)$;

4. $D_n(\varepsilon)\circ D_k(\delta)=D_k(\delta)\circ D_n([\delta',\varepsilon']\circ\varepsilon)$, $k<n$;

5. $t_{in}(\alpha)\circ D_i(\varepsilon)=D_i(\varepsilon)\circ t_{in}(\beta)$, где $\beta=\alpha+\alpha\varepsilon'+\varepsilon'(\alpha+\alpha\varepsilon')$;

6. $t_{ni}(\alpha)\circ D_i(\varepsilon)=D_i(\varepsilon)\circ t_{ni}(\beta)$, где $\beta=\alpha+\alpha\varepsilon+\varepsilon(\alpha+\alpha\varepsilon)$;

7. $t_{ij}(\alpha)\circ D_i(\varepsilon)=D_i(\varepsilon)\circ t_{ij}(\alpha+\varepsilon'\alpha)$, $i,j<n$;

8. $t_{nj}(\alpha)\circ D_k(\varepsilon)=D_k(\varepsilon)\circ t_{nj}(\alpha+\varepsilon\alpha)$, $j\neq k<n$;

9. $t_{ik}(\alpha)\circ D_k(\varepsilon)=D_k(\varepsilon)\circ t_{ik}(\alpha+\alpha\varepsilon)$, $i,k<n$;

10. $t_{in}(\alpha)\circ D_k(\varepsilon)=D_k(\varepsilon)\circ t_{in}(\alpha+\alpha\varepsilon')$, $i\neq k<n$;

11. $t_{ij}(\alpha)\circ D_k(\varepsilon)=D_k(\varepsilon)\circ t_{ij}(\alpha)$, $k<n$, $\{i,j\}\cap\{k,n\}=\emptyset$;

12. $t_{nj}(\alpha)\circ D_n(\delta)=D_n(\delta)\circ t_{nj}(\alpha+\delta'\alpha)$;

13. $t_{in}(\alpha)\circ D_n(\delta)=D_n(\delta)\circ t_{in}(\alpha+\alpha\delta)$;

14. $t_{ij}(\alpha)\circ D_n(\delta)=D_n(\delta)\circ t_{ij}(\alpha)$, $i,j<n$;

15. $t_{ij}(\alpha)\circ t_{ij}(\beta)=t_{ij}(\alpha+\beta)$;

16. $t_{in}(\alpha)\circ t_{ni}(\beta)=t_{ni}(\beta+\beta\varepsilon')\circ D_i(\varepsilon)\circ D_n(\varepsilon\circ\delta)\circ t_{in}(\alpha+\varepsilon'\alpha)$;

17. $t_{ij}(\alpha)\circ t_{ji}(\beta)=t_{ji}(\beta+\beta\varepsilon')\circ D_i(\varepsilon)\circ D_j(\delta)\circ D_n(\delta\circ\varepsilon)\circ t_{ij}(\alpha+\varepsilon'\alpha)$, $i,j<n$;

18. $t_{ik}(\alpha)\circ t_{kj}(\beta)=t_{ij}(\alpha\beta)\circ t_{kj}(\beta)\circ t_{ik}(\alpha)$, $i\neq j$;

19. $t_{ik}(\alpha)\circ t_{rj}(\beta)=t_{rj}(\beta)\circ t_{ik}(\alpha)$, $i\neq j, k\neq r$,

где в сериях 16 и 17 $\varepsilon=\alpha\beta$, $\delta=-\beta(\alpha+\varepsilon'\alpha)$.

Нашей дальнейшей целью является показать полноту системы соотношений $1-19$ для группы $GE^{\circ}(n,R)$. Доказательство полноты мы проводим методом трансформации, развитым в [18]. Названный метод использует стандартные формы элементов группы $GE^{\circ}(n,R)$. Стандартными формами в $GE^{\circ}(n,R)$ мы объявляем всевозможные слова алфавита (2) вида

$$w=g_1\circ\ldots\circ g_{n-1}\circ D_1(\varepsilon_1)\circ\ldots\circ D_n(\varepsilon_n)\circ f_{n-1}\circ\ldots\circ f_1. \qquad (sf)$$

Элементы указанной группы представляются в виде (sf) единственным способом.

Далее мы на множестве всех слов алфавита (2) вводим отношения $\overset{\mathrm{i}}{\underset{\rightarrow}{\sim}}$, $1 \le i < n$, положив $\omega \overset{i}{\underset{\rightarrow}{\sim}} \nu$ в том и только том случае, когда эти слова связаны соотношением $\omega = X \circ \nu$, где X – некоторое слово, не содержащее трансвекции вида $t_{k<j}(\alpha), \alpha \ne 0, k \le i$. Нам нужны и отношения $\overset{\sim}{\underset{i}{\rightarrow}}$, $1 \le i < n,$ определенные как $\omega \overset{\sim}{\underset{i}{\rightarrow}} \nu$ тогда и только тогда, когда для этих слов верно соотношение $\omega = \nu \circ \mathrm{Y}$ при некотором Y, где слово Y не содержит буквы вида $t_{k>j}(\alpha), \alpha \ne 0, j \le i$. Все эти отношения являются рефлексивными и транзитивными. Если в форме $f_i = t_{i,i+1}(\alpha_{i+1}) \circ \ldots \circ t_{in}(\alpha_n)$ ее аргумент α_p равен нулю, то этот факт мы условимся подчеркивать как $f_i(\ne p)$. Ниже аналогичный смысл придается и записям $f_i(\ne p,q), g_i(\ne p), g_i(\ne p,q)$.

Имеет место следующая

Теорема 1. (о трансформации букв справа). *Пусть* $0 \ne f$ – *произвольная горизонтальная форма ступени* i *и* x – *также произвольная ненулевая буква алфавита (2), для которой при* $x = t_{p<q}(\alpha)\ (\alpha \ne 0)$ *считается выполненным условие* $p \ge i$. *Для них применяя соотношения 5,7, 9 − 11 и 13 − 19, можно выполнить преобразование* $\nu = f_i \circ x \overset{i}{\underset{\rightarrow}{\sim}} \tilde{f}_i$ *, где* $\tilde{f}_i$ – *некоторая (также горизонтальная) форма ступени* i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оно комбинаторно и различает следующие случаи.

I. $x = D_k(\varepsilon)$.

Здесь мы применяя соотношения 5,7,9,11,13,14, имеем $\nu = f_i \circ D_k(\varepsilon) = D_k(\varepsilon) \circ \tilde{f}_i \overset{i}{\underset{\rightarrow}{\sim}} \tilde{f}_i$, где $\tilde{f}_i$ – некоторая горизонтальная форма ступени i.

II. $x = t_{pq}(\alpha)$.

Этот случай мы разбиваем на следующие подслучаи.

а) Если $p < i$ $(\rightarrow p > q$ по условию теоремы) или $q < p = i$, то применяя соотношения перестановочности 19, к требуемой форме мы приходим так $\upsilon = f_i \circ t_{pq}(\alpha) = t_{pq}(\alpha) \circ \tilde{f}_i \overset{i}{\underset{\rightarrow}{\sim}} \tilde{f}_i$.

b) $p=i<q$. Здесь мы используя соотношения 19 и 16, будем иметь $v=f_i(\neq q)\circ\left[t_{iq}(\alpha_q)\circ t_{iq}(\alpha)\right]=f_i(\neq q)\circ t_{iq}(\alpha_q+\alpha)=\tilde{f}_i\overset{i}{\underset{\to}{\sim}}\tilde{f}_i$.

c) $q=i<p$. Применяя соотношения 5,7,10,11,13−15 и 16 − 19, выполним следующие преобразования

$$v=f_i(\neq p)\circ\left[t_{ip}(\alpha_p)\circ t_{pi}(\alpha)\right]\overset{i}{\underset{\to}{\sim}}\tilde{f}_i(\neq p)\circ t_{pi}(\alpha+\alpha\varepsilon')\circ t_{ip}(\alpha_p+\varepsilon'\alpha_p)=$$
$$\tilde{f}_i(\neq p,k)\circ\left[t_{ik}(\beta_k)\circ t_{pi}(\alpha+\alpha\varepsilon')\right]\circ t_{ip}(\alpha_p+\varepsilon'\alpha_p)=$$
$$\left[\tilde{f}_i(\neq p,k)\circ t_{pk}\{-(\alpha+\alpha\varepsilon')\beta_k\}\right]\circ t_{pi}(\alpha+\alpha\varepsilon')\circ t_{ik}(\beta_k)\circ t_{ip}(\alpha_p+\varepsilon'\alpha_p)\overset{i}{\underset{\to}{\sim}}$$
$$\left[\tilde{f}_i(\neq p,k)\circ t_{pi}(\alpha+\alpha\varepsilon')\right]\circ t_{ik}(\beta_k)\circ t_{ip}(\alpha_p+\varepsilon'\alpha_p)\overset{i}{\underset{\to}{\sim}}\ldots\overset{i}{\underset{\to}{\sim}}t_{pi}(\alpha+\alpha\varepsilon')\circ\tilde{f}_i\overset{i}{\underset{\to}{\sim}}\tilde{f}_i.$$

Конечные члены полученной цепочки и показывают на правильность теоремы в этом случае.

d) $q<i<p$. Здесь мы применяя соотношения 18 и 19, получаем

$$v=f_i(\neq p)\circ\left[t_{ip}(\alpha_p)\circ t_{pq}(\alpha)\right]=\left[f_i(\neq p)\circ t_{iq}(\alpha_p\alpha)\circ t_{pq}(\alpha)\right]\circ t_{ip}(\alpha_p\alpha)=$$
$$t_{iq}(\alpha_p\alpha)\circ t_{pq}(\alpha)\circ f_i(\neq p)\circ t_{ip}(\alpha_p)\overset{i}{\underset{\to}{\sim}}f_i.$$

e) $i<p,q(p\neq q)$. Используя соотношения 19,18 и 15, здесь мы будем иметь

$$v=f_i(\neq p)\circ\left[t_{ip}(\alpha_p)\circ t_{pq}(\alpha)\right]f_i(\neq p,q)\circ\left[t_{iq}(\alpha_q)\circ t_{iq}(\alpha_p\alpha)\right]\circ t_{pq}(\alpha)\circ t_{ip}(\alpha)$$
$$=f_i(\neq p,q)\circ\left[t_{iq}(\alpha_q+\alpha_p\alpha)\circ t_{pq}(\alpha)\right]\circ t_{ip}(\alpha_p)=\left[f_i(\neq p,q)\circ t_{pq}(\alpha)\right]\circ t_{iq}(\alpha_q+\alpha_p\alpha)\circ$$
$$t_{ip}(\alpha_p)=t_{pq}(\alpha)\circ\tilde{f}_i\overset{i}{\underset{\to}{\sim}}\tilde{f}_i.$$

Итак, во всех имеющихся случаях преобразование $v\overset{i}{\underset{\to}{\sim}}\tilde{f}_i$ действительно выполняется.

Нам нужна и

Теорема 2 (о трансформации букв слева). *Пусть g_i − произвольная ненулевая вертикальная форма ступени i и $0\neq y$ − также произвольная буква из (2), причем при $y=t_{pq}(\alpha)\,(\alpha\neq 0)$ считается $p,q\geq i$ и $p<q\to p>i$. Для них применяя соотношения 5− 15 и 18,19, можно выполнить преобразование $v=y\circ g_i\underset{i}{\to}\tilde{g}_i$, где $\tilde{g}_i$ − вертикальная форма ступени i.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. И оно проводится аналогично доказательству теоремы 1 и чуть проще.

I. $y=D_k(\varepsilon)$.

В этом случае используя соотношения 5− 14, требуемую форму мы будем иметь как $v=D_k(\varepsilon)\circ g_i=\tilde{g}_i\circ D_k(\varepsilon)\underset{i}{\to}\tilde{g}_i$ где $\tilde{g}_i$ − некоторая вертикальная форма ступени i.

$$\text{II.} \qquad y = t_{pq}(\alpha).$$

Этот пункт разбивается на следующие два подслучая.

a) В случаях, когда $p < q$ $(\to p > i$ по условию теоремы) или же $i < q < p$, применяя соотношения 19,18,15 мы нужную форму получаем как

$$v = [t_{pq}(\alpha) \circ t_{pi}(\alpha_p)] \circ g_i(\neq p) = t_{pi}(\alpha_p) \circ [t_{pq}(\alpha) \circ t_{qi}(\alpha_q)] \circ g_i(\neq p, q) =$$
$$= [t_{pi}(\alpha_p) \circ t_{pi}(\alpha\alpha_q)] \circ t_{qi}(\alpha_q) \circ [t_{pq}(\alpha) \circ g_i(\neq p, q)] =$$
$$= [t_{pi}(\alpha_p + \alpha\alpha_q) \circ t_{qi}(\alpha_q) \circ g_i(\neq p, q)] \circ t_{pq}(\alpha) \underset{i}{\overset{\sim}{\to}} \tilde{g}_i.$$

b) $q = i$ $(\to p > i)$. Здесь мы используя соотношения 15,19, к требуемому виду приходим так $v = [t_{pi}(\alpha) \circ t_{pi}(\alpha_p)] \circ g_i(\neq p) = t_{pi}(\alpha + \alpha_p) \circ g_i(\neq p) = \tilde{g}_i \underset{i}{\overset{\sim}{\to}} \tilde{g}_i$.

Сформулируем теперь утверждение о стандартном строении в группе $GE^{\circ}(n, R)$.

Теорема 3. *Пусть* $w-$*произвольное слово алфавита (2). Применяя соотношения 1−19, его можно преобразовать и стандартному виду (sf).*

Доказательство использует теоремы 1, 2 и проводится как в работе [18]. Эти повторяющиеся подробности мы здесь опускаем.

Итак, слово w можно считать приведенным к виду

$$w = g_1 \circ D_1(\varepsilon_1) \circ T \circ g_1 \qquad (3)$$

при помощи соотношений $1-19$.

Отвлекаясь здесь накоротко, возвращаемся к вопросу о группах $G_{n-1}(R)$ и $G_n(R)$. Пусть δ − произвольной элемент из $G_n(R)$. Это по определению означает, что $D_n(\delta)$ есть некоторое слово w алфавита (2). Представив это слово в виде разложения (3), имеем равенство $D_n(\delta) = g_1 \circ D_1(\varepsilon_1) \circ T \circ f_1$. Но последнее возможно, как легко видеть, только при $g_1 = D_1(\varepsilon_1) = f_1 = 0$. А это означает, что $D_n(\delta)$ можно представить и в виде некоторого слова алфавита $t_{ij}(\alpha), i \neq j;\ D_k(\varepsilon), k < n$ $(\alpha, \varepsilon \in R, 2 \leq i, k, j \leq n)$, т.е. имеем $G_n(R) \leq G_{n-1}(R)$. Последнее вместе с очевидным включением $G_{n-1}(R) \leq G_n(R)$ даст нам и $G_n(R) = G_{n-1}(R)$.

Вытягивая теперь аналогично из T (в (3)) формы $g_2, D_2(\varepsilon_2), f_2$, применяя затем соотношения 8,11, заданное слово представим в виде

$$w = g_1 \circ g_2 \circ D_1(\varepsilon_1) \circ D_2(\varepsilon_2) \circ S \circ f_2 \circ f_1,$$

где S – слово, не содержащее буквы вида $t_{pq}(\alpha), \alpha \neq 0$, с $p \leq 2$ или $q \leq 2$, и $D_k(\varepsilon)$, $\varepsilon \neq 0$, $k \leq 2$, и т.д. Описанной процесс отщеплений на $(n-1)$–м шаге и приводит нас к стандартной записи (*sf*). Теорема 3 доказана в полном объеме.

Теперь упомянутый в начале параграфа вопрос об образующих и соотношениях группы $GE^{\circ}(n, R)$ может быт решен попутно и как почти прямое следствие из теоремы 3. Действительно взяв в качестве порождающей системы алфавит (2) (группа $GE^{\circ}(n, R)$ порождается им по определению), рассмотрим произвольно соотношение $w = 0$. Применяя к слову w теорему 3 (т.е. записывая его в стандартном виде при помощи соотношений 1−19), преобразуем заданное соотношение к виду

$$g_1 \circ \ldots \circ g_{n-1} \circ D_1(\varepsilon_1) \circ \ldots \circ D_n(\varepsilon_n) \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1 = 0.$$

Поскольку стандартная запись всегда единственна, последнее возможно только при нулевых буквах левой части. А это означает зависимость соотношения $w = 0$ от соотношений 1− 19. Таким образом, элементарная линейная группа над радикальным кольцом $R \neq \{0\}$ генетически может быть описана как $GE^{\circ}(n, R) = ((2)//1-19)\ (n \geq 2)$.

§4. Диковское задание проективного фактора $PGE^{\circ}(n, R)$

Указанное представление и здесь мы начнем с вычисления центра $C = cent\, GE^{\circ}(n, R)$. Пусть $w = (w_{ij})$ – произвольное слово алфавита (2), записывающее матрицу из C (w_{ij} означает позицию $<i,j>$ этой матрицы после выполнения квазиумножений в w). Оно обязано удовлетворять следующим условиям:

а) для любого номера $i, i < n,$ и $x \in R$ имеем

$D_i(x) \circ w = w \circ D_i(x) \to D_i(x)w = w\, D_i(x) \to xw_{ii} = w_{ii}(x) \to w_{ii} \in centR.$

Равенства $D_1(x') \circ w = w \circ D_1(x') \to D_1(x')w = w\, D_1(x') \to xw_{nn} = w_{nn}x$

показывают, что последнее включение верно и при $i = n$.

б) для любых $i,\ j,\ i \neq j,$ и $x \in R$ имеем также импликации $\boldsymbol{t_{ji}}(x) \circ w = w \circ \boldsymbol{t_{ji}}(x) \to \boldsymbol{t_{ji}}(x)\ w = w\ \boldsymbol{t_{ji}}(x) \to \boldsymbol{xw_{ij} = 0 = w_{ij}x \wedge xw_{ii} = w_{jj}x}$. Здесь первые равенства дают нам, что для недиагональных позиций $w_{ij} \in AnnR$. А вторые же с учетом центральности w_{ij} и w_{ij} приведут нас к $w_{ii} - w_{jj} \in AnnR$, т.е. $w_{ii} \equiv w_{jj} (\mathrm{mod} AnnR)$.

Пусть, как и выше, $d(\varepsilon) = diag(\varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon)$ означает скалярную матрицу порядка n. Из пунктов а) и б) следует, что $d(\boldsymbol{w'_{11}})\circ w=\boldsymbol{a}-$ некоторая матрица с элементами из идеала $AnnR$. Отсюда следует представимость рассмат-риваемого слова в виде $w=d(\boldsymbol{\varepsilon}) \circ \boldsymbol{a}$, где $\varepsilon \in centR$и $a \in M(n, AnnR)$. И обратно, все такие комбинации $d(\boldsymbol{\varepsilon}) \circ \boldsymbol{a}$ в центр C входят очевидным образом. Для $x \in R$ и $n \in N$ примем обозначение $\boldsymbol{x^{(n)}} = \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{x} \circ ... \circ \boldsymbol{x}$, где число квазисо-множителей равно n ($\boldsymbol{x^{(n)}} - \boldsymbol{n}$-я квазистепень элемента x). Примем также обозначение $\sqrt[(\boldsymbol{n})]{(\boldsymbol{R})}=\{x\in \boldsymbol{R} | \boldsymbol{x}^{(n)} \in G(R)\}$. Легко проверить, что $centR \cap \sqrt[(\boldsymbol{n})]{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{R})}$ образует подгруппу в $\boldsymbol{R}^{\circ}$. Итак, мы установили, что центр C порождается (однобуквенными) словами $t_{ij}(a), a \in AnnR$, и длинными словами вида $\boldsymbol{D_1}(\boldsymbol{\varepsilon})\circ ... \circ \boldsymbol{D_{n-1}}(\boldsymbol{\varepsilon})\circ \boldsymbol{D_n}(\boldsymbol{\varepsilon^{(n)}})$, $\varepsilon \in centR \cap \sqrt[(n)]{G(R)}$. Тогда, как и в §$\boldsymbol{2}$ (этой главы), присоединение к $1-\boldsymbol{19}$ из предыдущего параграфа соотношений

20. $t_{ij}(a) = 0,\ a \in AnnR,$

и “соотношений скалярности”

21. $D_1(\varepsilon) \circ ... \circ D_{n-1}(\varepsilon) \circ D_n(\varepsilon^{(n)}) = 0, \varepsilon \in centR \cap \sqrt[(n)]{GR},$

дает нам полную для $PGE^{\circ}(n,R)$ систему соотношений (относительно тех же порождающих (2)). Полученному комбинаторному описанию можно придать и следующий диковский вид $PGE^{\circ}(n,R)$=< (2) ||1− 21>.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С 1998 года автором монографии были начаты исследование по выявлению образующих и соотношений некоторых линейных групп над ассоциативными кольцами (вообще говоря) без 1. Они были подхвачены также другими авторами и интенсивно ведутся и сейчас. Предлагаемая монография также посвящена к названному направлению, а точнее в ней решены следующие вопросы: а) в главе I найдены комбинаторные описания обобщенной симплектической группы $Sp^{\circ}(2n,R)$ и ее проективного фактора $PSp^{\circ}(2n,R)$ над произвольным коммутативным полулокальным кольцом R; б) во второй же главе основной вопрос комбинаторной теории групп решен для обобщенной специальной линейной группы $SL^{\circ}(n,R)$ и серийно для всех промежуточных под групп H, $SL^{\circ}(n,R) \le H \le GL^{\circ}(n,R)$, над (уже) произволь-ным полулокальным кольцом R. Здесь выделяющий $SL^{\circ}(n,R)$ как ядро, гомо-морфизм det° построен по принципу Дъёдонне; в) а в главе III выявлены опи-сания Дика для обобщенных линейных групп $GL^{\circ}(n,R), GE^{\circ}(n,R)$ и их проек-тивных факторов $PGL^{\circ}(n,R)$, $PGE^{\circ}(n,R)$ над произвольным (отличным от нуля) радикальным кольцом R.

При решении этих вопросов применен метод трансформации букв, развитый автором в еще более ранних его работах, суть которого заклю-чается в преобразовании любого слова w к его стандартному виду $s(w)$. Как хорошо видно из сказанного, названный метод является универсальным. А что касается систем образующих, то в качестве таковых каждый раз взяты элементарные матрицы, содержащиеся в названных группах.

Далее, если в главах I, II монографии, а также исследованиях автора, выполненных до нее, основное кольцо R не имело единицу 1 “вообще говоря” (т.е. содержало в себе его классические случаи с 1), то в главе

III картина выглядит кардинально по-другому – здесь 1 в R не существует во-обще. Это говорит о том, что введенные здесь обобщенные линейные группы не просто обобщают их классические случаи, а являются их обобщениями существенными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артин Э.* Геометрическая алгебра. − М.: Наука, 1969. − 283с.
2. *Боревич З.И.*, *Вавилов Н.А.* Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц // Труды мат. ин-та АН СССР. 1978. Т. 148. С. 43 − 57.
3. *Дыбкова Е.В.* О некоторых конгруэнцподгруппах симплектической группы // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР. 1976. т. 64. С. 80 − 91.
4. *Дыбкова Е.В.* Подгруппы гиперболических унитарных групп : Дисс…докт. физ.-матем.наук. Санкт-Петербург, 2006. 182с.
5. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп − М.: Наука, 1982. − 288с.
6. *Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. − М.: Наука, 1980 − 240с.
7. *Курош А.Г.* Общая алгебра . Лекции 1969 − 1970 учебного года.− М.: Наука, 1974 − 160с.
8. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. − М.: Мир, 1980. − 448с.
9. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп.− М.: Наука, 1974.− 450с.
10. *Мельников О.В., Ремесленников В.Н, Романьков В.А. и др.* Общая алгебра. Т.1.− М.: Наука, 1990. − 591с.
11. *Носков Г.А.* Порождающие элементы и определяющие соотношения симплектических групп над некоторыми кольцами // Мат. заметки. 1974. Т.16. №2. С. 237 − 246.
12. *Романовский Н.С.* Образующие и определяющие соотношения полной линейной группы над локальным кольцом // Сиб. мат. ж. 1971. Т.13. №4. С. 922 − 925.
13. *Сатаров Ж.С.* Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы. I // Изв. вузов. Математика. 2006. №10. С. 59 − 67.
14. *Сатаров Ж.С.* Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы. II // Изв. вузов. Математика. 2006. №11. С. 33 − 41.
15. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения обобщенных ортогональных групп над коммутативными локальными кольцами без единицы // Изв. вузов. Математика. 2000. №6. С.24 − 32.

16. *Сатаров Ж.С.* Образующие и соотношения обобщенной ортогональной группы над коммутативными полулокальными кольцами без единицы// Изв. вузов. Математика. 2007. №7. С.61 − 70.
17. *Сатаров Ж.* Образующие элементы и определяющие соотношения в линейных группах: Дисс…. докт. физ.-матем. наук. Ош, 1998.232с.
18. *Сатаров Ж.* Образующие элементы и определяющие соотношения в линейных группах: Автореферат дисс…. докт. физ.-матем. наук. Красноярск, 1998.31с.
19. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц// Изв. вузов. Матемтика. 1991. №1. С.47 − 53.
20. *Сатаров Ж.С.* Образующие и определяющие соотношения в специаль-ной мультипликативной группы слабосовершенного кольца // Сиб. мат. же 1990. Т.31. №3 с. 167 − 175.
21. *Сатаров Ж.С.* Образующие и определяющие соотношения унитарной группы над телом кватернионов // Кольца и матричные группы. Орджоникидзе: изд-во СОГУ. 1984. С. 121− 128.
22. *Сатаров Ж.С.* О подгруппах мультипликативной *D*-группы обобщенного матричного кольца, содержащих тор.− Деп. в ВИНИТИ (через Редакцию Сиб.мат. ж.) №4200-В-1989.− 13с.
23. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения в некоторых подгруппах мультипликативной группы обобщенного матричного кольца // Изв. вузов. Математика. 1989. №8. С.88 − 90.
24. *Сатаров.Ж.С.* Определяющие соотношения в унитарной группе // Структурные свойства алгебраических систем. Нальчик. 1981. С. 97−108.
25. *Сатаров.Ж.С.* Определяющие соотношения в элементарной треугольной группе над кольцами // Мат. заметки.1986. т.39. №6. С. 785−790.
26. *Сатаров.Ж.С.* Определяющие соотношения вырожденной элементарной унитарной группы над квадратичным расширением упорядоченного евклидова поля // Мат. заметки. 1989. Т.45. №1. С. 89− 100.
27. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения классических ортогональных групп над коммутативными локальными кольцами // Изв. вузов. Математика. 1994. №10. С.1− 9.
28. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения ортогонаьной группы над упорядоченным евклидовым полем // Сиб. мат.ж. 1986. Т.27.№2 С. 171− 175.

29. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Изв. вузов. Математика. 1991. №1. С. 47− 53.
30. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения специальной унитарной группы над квадратичным расширением упорядоченного евклидова поля // Мат. сборн. 1985.Т.126 (168). №3. С. 426 − 430.
31. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения унитарной группы над конечным полем // Структурные свойства групп. Орджоникидзе: издво СОГУ. 1982. С. 47-60.
32. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения унитарной группы над локальным полем − Деп. в ВИНИТИ. №4227− 1982.− 24с.
33. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения унитарной группы над полем из четырех элементов− Деп. в ВИНИТИ. №4261−1982. −14 с.
34. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения элементарной псевдо-унитарной группы над квадратичным расширением евклидово упорядоченного поля // Сиб. мат. ж. 1988. Т. 29. №1. С.217.
35. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения элементарной псевдоунитарной группы над квадратичным расширением евклидово упорядоченного поля − Деп. в ВИНИТИ. №9011− В− 1985.− 17с.
36. *Сатаров Ж., Борубаева К.И.* Определяющие соотношения обобщенной симплектической группы над коммутативным полулокальным кольцом // Известия ОшТУ. 2016. №1. С. 112− 118.
37. *Сатаров Ж.С.* , *Пащевский А.А.* Описание Дика проективной полной симплектической группы над коммутативным полулокальным кольцом // Известия ОшТУ. 2019. №2. С.29− 32.
38. *Сатаров Ж., Ахунбек к. М.* Стандартные формы в линейных группах над радикальным кольцом и их приложения // Известия ОшТУ. 2019. №2. С. 33− 38.
39. *Сатаров Ж.* Задание классической унитарной группы определяющими соотношениями // Тез. докл. 16 –й Всесоюзн. алгебр. конф., ч.I. Ленинград. 1981. С. 143− 144.
40. *Сатаров Ж.С.* Задание специальной мультипликативной группы слабосовершенного кольца определяющими соотношениями // Тез. докл. и сообщ. 30-й научно-теорет. конф. препод. Ошского пединститута. Ош, май. 1990г.− Ош, 1991. С. 55.
41. *Сатаров Ж.С.* Образующие и соотношения классических унитарных групп над локальным кольцом // Тез. докл. Региональной научно-технич. конф. препод. “Пути повышения эффективности ис-

пользования отходов промышленности”. Ош, окт. 1993г.− Ош, 1993. С.83.

42. *Сатаров Ж.С.* Образующего и соотношения центра мультипликативной группы слабосовершенного кольца // Тез. докл. Междунар. научно-практич. конф. “Современные методы и средства информационных технологий ”. Ош, июнь 1995г. − Ош, 1995. С. 108-109.
43. *Сатаров Ж.С.* Об определяющих соотношениях подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц // Тез. докл. и сообщ. 29-й научно- теорет. конф. препод. Ошского пединститута. Ош, май. 1989г.− Ош, 1990. С. 150.
44. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения в мультипликативных унитарных группах слабосовершенного кольца // Тез. докл. третьей Междунар. конф. по алгебре памяти М.И. Каргаполова. Красноярск, авг. 1993г. −Красноярск: ИНОПРОФ, 1993. С. 293-294.
45. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения ортогональных групп над коммутативным локальным кольцом // Тез. докл. республ. науч. конф. “ Дифференциальные уравнения и их приложения”. Ош, сент. 1993г. − Ош, 1993. С. 96.
46. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения классической унитарной группы над кольцом дуальных чисел // Тез. докл. Междунар. научно-практич. конф. “Современные методы и средства информационных технологий”. Ош, июнь. 1995г. − Ош, 1995. С. 106 − 107.
47. *Сатаров Ж.С.* Определяющие соотношения в группах квазиобратимых элементов полулокального кольца // Тез. докл. Междунар. алгебр. конф. памяти Д.К.Фаддеева. Санкт-Петербург, июнь. 1997г.− Санкт-Петербург, 1997. С. 273 − 274.
48. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле.− М.: Мир, 1975.− 262с.
49. *Чандлер Б., Магнус В.* Развитие комбинаторной теории групп.− М.: Мир, 1985.− 253с.
50. *Янь Ши-цзянь.* Определяющие соотношения n-мерной модулярной группы // Бейцзин шифань дасаюэ кэсюэ луньвень сюанцзи. 1959. окт. С. 48− 70.
51. *Behr H., Mennicke J.* A presentation of the groups PSL(2,p). Canad. J. Math., 20, 1968, N6. − P. 1432− 1438.
52. *Bussey W.H.* Generational relations for the abstract group simply isomorphic with the group LF[2, $\boldsymbol{p^n}$]. Proc. London Math. Soc.,3, 1905, P. 296 − 315.
53. *Green S.M.* Generators and relations for the special linear group over a division ring. Proc. Amer. Math. Soc., 62, 1977, N2. − P. 229 − 232.

54. *Magnus W.* Uber n-dimensionale Gottertransformationen. Acta Math., 64,1934.– S. 353 – 367.
55. *Neumann B.H., Neumann Hanna.* Zwei Klassen charakteristisher Untergruppen und ihre Faktorgruppen. Math. Wachr., 4, 1951. – S. 106 – 125.
56. *Sasiada E.* Solution of the problem on the existence of a simple radical ring. Bull. Acad. polon. sei., Ser. Math., actronom., phys., 9, 1961, N4. – P. 257.
57. *Sunday J.G.* Presentations of the groups SL(2,m) and PSL(2,m). Canad. J. Math., 24, 1972, N5. – P. 1129 – 1131.

Аннотация

Монографияда трансформация методу менен төмөнкү сызыктуу группалардын: a) каалаган (1 дин жашашы шарт болбогон) коммутативдик полулокалдык алкактын үстүндө симплекстик группанын: b) каалаган (нөлдөн айырмалуу) радикалдык алкактын үстүндө толук жана толук элементардык сызыктуу группалардын; c) a), b) пункттарындагы бардык группалардын проективдик факторлорунун; d) каалаган полулокалдык алкактын үстүндө атайын сызыктуу группанын (негизги алкакта 1 дин болушу шарт эмес, det° квазианыктагычы Дъёдонне үлгүсү боюнча алдын-ала кийирилет); e) полулокалдык алкактын үстүндө толук сызыктуу группанын анын атайын бөлүгүн кармоочу камтылуучуларынын жаратуучулары жана катыштары табылган.

Abstract

In the monograph using the transformation method, the generators and relations of the following linear groups are found: a) a symplectic group over an arbitrary commutative semilocal ring (where the existence of 1 is not necessary); b) a complete and complete elementary linear group over an arbitrary (non-zero) radical ring; c) the projective factors of all groups of a), b); d) a special linear group over an arbitrary semilocal ring (also not necessarily from 1, here the quasi-determinant det0 is introduced in advance and modeled after Dyodonne); e) subgroups with a linear ring of a linear group over a semilocal ring containing its special part.